Deux dénombrements qui se ressemblent

On lance n fois un dé à 6 faces. Pour tout entier i compris entre 2 et n, on dit qu'il y a changement de chiffre au i° rang si, aux $(i-1)$° et i° lancers, on a obtenu deux chiffres différents. Par exemple, dans le résultat 65224245556, *il y a* 7 *changements de chiffre.*

Pour simplifier les notations, on pose $p = 5/6$ *et* $q = 1/6$.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de changements de chiffre. Déterminer la loi de X.

• Raisonnement :

Pour un résultat tel que

5	4	4	2	1	1	1	3	6

on peut représenter les changements de chiffre ainsi (*C*=changement, *N*=pas de changement) :

	C	*N*	*C*	*C*	*N*	*N*	*C*	*C*

Ayant remarqué qu'il peut y avoir entre 0 et $n-1$ changements de chiffre, et que ceux –ci peuvent intervenir à n'importe quel rang sauf le premier, on calcule $P(X=k)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ en :

- choisissant les k rangs où on place la lettre C : $\binom{n-1}{k}$ choix

- calculant la probabilité d'avoir C à ces k rangs et N aux $n-1-k$ autres rangs : $p^k q^{n-1-k}$

• Conclusion : $\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P(X=k) = \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}}$

On lance indéfiniment un dé à 6 faces. On appelle succès le fait d'obtenir le chiffre 6. On fixe $r \in \mathbb{N}^*$ *et X est la variable aléatoire qui donne le rang auquel est enregistrée le r° succès.*

On pose $p = 1/6$ *et* $q = 5/6$. *Déterminer la loi de X.*

• Raisonnement :

Remarquons qu'il faut au moins *r* essais pour enregistrer *r* succès.
Nous allons donc calculer $P(X=k)$ pour $k \in [\![r, +\infty)$.

Représentons la succession des échecs et des succès jusqu'au rang *k* :

$$\Big(\underbrace{S\ \ S\ \ E\ \ S\ \ E\ \ E\ \ S\ \ E}_{k-1 \text{ essais}}\ \ \underset{\substack{\downarrow \\ k° \text{ essai}}}{S}\Big)$$

Lors des $k-1$ premiers essais, il y a eu $r-1$ succès (lettre *S*), et donc $k-r$ échecs (lettre *E*). On calcule $P(X=k)$ en :

- choisissant les rangs des $r-1$ premiers succès : $\binom{k-1}{r-1}$ choix

- calculant la probabilité d'avoir *S* à ces $r-1$ rangs et au rang *k* (donc *r* fois), et *E* aux $k-r$ autres rangs : $p^r q^{k-r}$

• Conclusion : $\boxed{\forall k \in [\![r, +\infty),\ P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}}$

★ *Une des deux lois est binomiale. Laquelle ? Avec quels paramètres ?*