

Deux dénombrements qui se ressemblent

On lance n fois un dé à 6 faces. Pour tout entier i compris entre 2 et n , on dit qu'il y a changement de chiffre au i° rang si, aux $(i-1)^{\circ}$ et i° lancers, on a obtenu deux chiffres différents. Par exemple, dans le résultat 65224245556, il y a 7 changements de chiffre.

Pour simplifier les notations, on pose $p = \frac{5}{6}$ et $q = \frac{1}{6}$.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de changements de chiffre. Déterminer la loi de X .

• Raisonnement :

Pour un résultat tel que

5	4	4	2	1	1	1	3	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---

on peut représenter les changements de chiffre ainsi (C=changement, N=pas de changement) :

	C	N	C	C	N	N	C	C
--	---	---	---	---	---	---	---	---

Ayant remarqué qu'il peut y avoir entre 0 et $n-1$ changements de chiffre, et que ceux-ci peuvent intervenir à n'importe quel rang sauf le premier, on calcule $P(X = k)$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ en :

- choisissant les k rangs où on place la lettre C : $\binom{n-1}{k}$ choix

- calculant la probabilité d'avoir C à ces k rangs et N aux $n-1-k$ autres rangs : $p^k q^{n-1-k}$

• Conclusion : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P(X = k) = \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}$

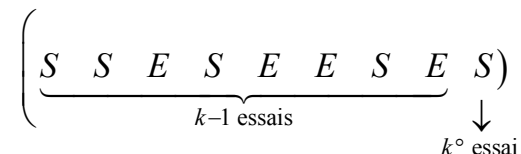
On lance indéfiniment un dé à 6 faces. On appelle succès le fait d'obtenir le chiffre 6. On fixe $r \in \mathbb{N}^*$ et X est la variable aléatoire qui donne le rang auquel est enregistrée le r° succès.

On pose $p = \frac{1}{6}$ et $q = \frac{5}{6}$. Déterminer la loi de X .

• Raisonnement :

Remarquons qu'il faut au moins r essais pour enregistrer r succès. Nous allons donc calculer $P(X = k)$ pour $k \in \llbracket r, +\infty \rrbracket$.

Représentons la succession des échecs et des succès jusqu'au rang k :



Lors des $k-1$ premiers essais, il y a eu $r-1$ succès (lettre S), et donc $k-r$ échecs (lettre E). On calcule $P(X = k)$ en :

- choisissant les rangs des $r-1$ premiers succès : $\binom{k-1}{r-1}$

choix

- calculant la probabilité d'avoir S à ces $r-1$ rangs et au rang k (donc r fois), et E aux $k-r$ autres rangs : $p^r q^{k-r}$

• Conclusion : $\forall k \in \llbracket r, +\infty \rrbracket, P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$

★ Une des deux lois est binomiale. Laquelle ? Avec quels paramètres ?