Unitaire ? Vous avez dit unitaire ?

L'adjectif « unitaire » est utilisé en mathématiques pour qualifier un bon nombre d'objets, en particulier les polynômes et les vecteurs. Mais, si vous avez bien suivi le cours d'algèbre linéaire de 1° et 2° année, vous savez qu'un polynôme à coefficients dans K peut toujours être considéré comme un vecteur de $K[X]$, et donc qu'un vecteur est parfois un polynôme. D'où le problème : comment faut-il comprendre la question « *démontrer que ce polynôme est unitaire* » ? Merci à Lola de m'avoir donné l'occasion de rédiger ce document.

• Vecteur unitaire

<u>Définition 1</u> : soit E un espace euclidien ou préhilbertien muni d'un produit scalaire. On dit qu'un vecteur u de E est **unitaire** si $\|u\| = 1$.

→ On ne peut donc parler de polynôme unitaire en ce sens que si $E = K[X]$ ou $E = K_n[X]$ $(n \in \mathbb{N})$ <u>et</u> si E est muni d'un produit scalaire. Or il n'y a pas de produit scalaire qui s'impose dans $K[X]$ ou $K_n[X]$ (ce qu'on appellerait un produit scalaire *canonique*).

Quelques exemples :

- dans $K_n[X]$[1], on peut définir $\left(P \middle| Q\right) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$;
- dans $K[X]$, on peut définir $\left(P \middle| Q\right) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, mais aussi

par exemple $\left(P \middle| Q\right) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}dt$.

Bien entendu, un polynôme peut être unitaire pour un produit scalaire, sans l'être pour un autre[2].

[1] Mais pas dans $K[X]$. Pourquoi ?

[2] De même, deux polynômes peuvent être orthogonaux pour un produit scalaire, sans l'être pour un autre.

• Polynôme unitaire

<u>Définition 2</u> : un polynôme P à coefficients dans K est dit **unitaire** si son coefficient dominant est égal à 1.

→ On sait alors que, si P est de degré n, et si ses racines complexes[3] sont $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$:

$$P(X) = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)...(X-\alpha_n)$$

Par ailleurs, $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ et, en développant la factorisation (*), on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_1 \times \alpha_2 \times ... \times \alpha_n = (-1)^n a_0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -a_{n-1} \end{cases}$$

<u>Exemple</u> : avec le produit scalaire $\left(P \middle| Q\right) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$,

- $P_0(X) = \sqrt{3}(2X-1)$ est unitaire au sens de la définition 1 mais il n'est pas unitaire au sens de la définition 2 ;
- $P_1(X) = X - 2$ est unitaire au sens de la définition 2, mais pas au sens de la définition 1 puisque $\|P_1\| = 1/\sqrt{3}$.

[3] Dans cette écriture, une racine d'ordre p est répétée p fois.