Transposée et inverse d'une matrice carrée

On considère un nombre k réel ou complexe et deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ou complexes, $A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ et $B=\left(b_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$.

• Transposée :

Définition : la **matrice transposée** de A est définie par :

$$^{t}A=\left(a_{ji}\right)_{1\le i,j\le n}$$

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, la i° colonne de A est la i° ligne de ^{t}A.

Formules : $^{t}(kA)=k.^{t}A$, $^{t}(A+B)={}^{t}A+{}^{t}B$, $^{t}({}^{t}A)=A$ et

$$\boxed{^{t}(AB)={}^{t}B.{}^{t}A}$$

Cas particulier : si $A={}^{t}A$, on dit que A est une **matrice symétrique**. Alors, lorsque $K=\mathbb{R}$, dans une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, A est la matrice d'un **endomorphisme symétrique** f.

• Inverse :

Définition : on dit que A est une matrice **inversible** s'il existe une matrice A' carrée d'ordre n telle que $AA'=A'A=I_n$.

Alors A' est notée A^{-1} et elle est appelée la **matrice inverse** de A.

D'où la formule : $\boxed{A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_n}$

Formules : $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1}=A$ et $\boxed{(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}}$

Cas particulier : $A=A^{-1} \Leftrightarrow A^2=I_n \Leftrightarrow$ A est la matrice d'une **symétrie** f dans une base quelconque de K^n

• L'inverse de la transposée est égale à la transposée de l'inverse: $\boxed{({}^{t}A)^{-1}={}^{t}(A^{-1})}$

• Quand l'inverse et la transposée sont confondues :

Définition : A est une **matrice orthogonale** si elle vérifie l'égalité : $^{t}A.A=I_n$

Ceci équivaut à dire que A est inversible et que son inverse est égale à sa transposée : $A^{-1}={}^{t}A$.

L'avantage d'une matrice orthogonale est que la résolution d'un système $AX=Y$ est immédiate : $X=A^{-1}Y={}^{t}A.Y$