Théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection : le match

Hypothèses : I est un intervalle et f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

• Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :

Si f est continue, f(I) est un intervalle.

C'est tout ce qu'il y à dire !

<u>Conséquence</u> : si a et b sont deux points de I, avec $a < b$, comme f(a) et f(b) appartiennent à f(I) et que f(I) est un intervalle, tout nombre α compris entre f(a) et f(b) appartient aussi à f(I). Donc il existe x_0 appartenant à I tel que $f(x_0) = \alpha$.

Traduction : $\boxed{\exists x_0 \in I \,/\, f(x_0) = \alpha}$

Autrement dit : **la fonction f prend au moins une fois toutes les valeurs intermédiaires entre f(a) et f(b).**

<u>Remarque</u> : x_0 est un antécédent de α. En l'absence d'hypothèses supplémentaires, on ne sait pas si cet antécédent est unique. Il peut exister un nombre $x_1 \neq x_0$ tel que $f(x_0) = f(x_1) = \alpha$. Dans ce cas, f n'est pas injective.

En revanche, $f : I \to f(I)$ est toujours surjective, puisque dans ce cas, on a pris comme ensemble d'arrivée l'ensemble des images.

• Théorème de la bijection (TB) :

Si f est continue <u>et</u> strictement monotone, f(I) est un intervalle et $f : I \to f(I)$ est une fonction bijective.

<u>Conséquence</u> : supposons f strictement croissante. Si a et b sont deux points de I, avec $a < b$, on a $f(a) < f(b)$ et, par bijectivité de $f : I \to f(I)$, il existe un unique x_0 appartenant à I tel que $f(x_0) = \alpha$.

Traduction : $\boxed{\exists !\, x_0 \in I \,/\, f(x_0) = \alpha}$

Autrement dit : **la fonction f prend exactement une fois toutes les valeurs intermédiaires entre f(a) et f(b).**

• En pratique :

f étant supposée continue, on note $m = \operatorname{Inf} f(I)$ et $M = \operatorname{Sup} f(I)$, où m et M sont, soit des nombres réels, soit $m = -\infty$ et/ou $M = +\infty$. Alors f(I) est un intervalle d'extrémités m et M. Considérons alors $\alpha \in \,]m, M[$.

- d'après le TVI, $\exists x_0 \in I \,/\, f(x_0) = \alpha$
- d'après le TB, si f est en outre strictement monotone,

$$\exists !\, x_0 \in I \,/\, f(x_0) = \alpha$$