# « Un instrument qui permet de passer du fini à l'infini »

Diable ! Quel est cet instrument miraculeux dont parle Henri Poincaré en 1902 dans son livre *La science et l'hypothèse* ? Poincaré précise que cet instrument est « **le raisonnement mathématique par excellence** ». Cette affirmation est surprenante car l'instrument de base du mathématicien est bien connu : c'est le raisonnement déductif par lequel, à partir d'axiomes, de définitions et de résultats antérieurs, le mathématicien produit de nouveaux résultats.

Le mécanisme d'un pas déductif est le suivant : il consiste à poser une prémisse *p*, invoquer un énoncé-tiers incontestable du type *si p, alors q* et énoncer la conclusion *q* [1]. Cette dernière étape est dite *opération de détachement*. Cette dénomination a l'intérêt de marquer le fait que le pas déductif opère non pas sur le contenu des propositions, mais sur leur valeur de vérité : la proposition *q*, qui pouvait être vraie ou fausse, est déclarée vraie, mais la déduction n'a pas modifié la valeur sémantique de *q*, c'est-à-dire l'information qu'elle porte. « Une déduction ne fait qu'exprimer ce qui se trouve dans un concept, quasi au sens d'un presse-citron qui en exprime le jus. […] Le seul moteur est celui de l'implication logique *si p alors q* » [2]. De ce fait, dit Poincaré,

> « la possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble. Si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ? Si, au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ? Le syllogisme ne peut rien nous apprendre d'essentiellement nouveau et, si tout devait sortir du principe d'identité, tout devrait aussi pouvoir s'y ramener. Admettra-t-on donc que les énoncés de tous ces théorèmes qui remplissent tant de volumes ne soient que des manières détournées de dire que A est A ? […]
> Le raisonnement syllogistique reste incapable de rien ajouter aux données qu'on lui fournit ; ces données se réduisent à quelques axiomes et on ne devrait pas retrouver autre chose dans les conclusions. Si l'on se refuse à admettre ces conséquences, il faut bien concéder que le raisonnement mathématique a par lui-même une sorte de vertu créatrice et par conséquent qu'il se distingue du syllogisme. La différence doit même être profonde ».

Ayant ainsi établi la nécessaire utilisation dans la pratique mathématique de raisonnements non déductifs, Poincaré entreprend une enquête pour les identifier. Pour cela, dit-il, « il nous faut chercher la pensée mathématique là où elle est restée pure, c'est-à-dire en arithmétique ». Et il trouve facilement un candidat : il s'agit du raisonnement par récurrence selon lequel « on établit d'abord un théorème pour $n = 1$ ; on montre ensuite que s'il est vrai de $n - 1$, il est vrai de $n$ et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers ». En quoi le raisonnement par récurrence se distingue-t-il du raisonnement déductif ? La réponse de Poincaré est que

> « le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes. Pour qu'on s'en puisse mieux rendre compte, je vais énoncer les uns après les autres ces syllogismes qui sont, si l'on veut me passer l'expression, disposés en cascade. Ce sont bien entendu des syllogismes

[1] On retrouve dans cette décomposition, avec un vocabulaire différent, les trois éléments (mineure, majeure et conclusion) qui, depuis Aristote, constituent un syllogisme.

[2] Grize, Jean-Blaise (2004). « Le point de vue de la logique naturelle : démontrer, prouver, argumenter » in Doury, M. et Moirand, S. (éds). *L'argumentation aujourd'hui. Positions théoriques et confrontations.*

hypothétiques. Le théorème est vrai du nombre 1. Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2. Donc il est vrai de 2. Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3. Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite. On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure [prémisse] au suivant. De plus les majeures [énoncés-tiers] de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique. Si le théorème est vrai de $n - 1$, il l'est de $n$. On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui contient comme cas particuliers toutes les majeures. Cette suite de syllogismes qui ne finirait jamais se trouve ainsi réduite à une phrase de quelques lignes. »

Sans raisonnement par récurrence, il serait possible de démontrer qu'un théorème donné est vrai pour une certaine valeur entière $n$, aussi grande soit-elle. En effet, pour passer du rang 1 au rang $n$, il suffit de $n$-1 pas déductifs. « Et cependant », dit Poincaré, « quelque loin que nous allions ainsi, nous ne nous élèverions jamais jusqu'au théorème général, applicable à tous les nombres, qui seul peut être objet de science. Pour y arriver, il faudrait une infinité de syllogismes, il faudrait franchir un abîme que la patience de l'analyste, réduit aux seules ressources de la logique formelle, ne parviendra jamais à combler. »

Sans conteste, le raisonnement par récurrence est indispensable au mathématicien : « c'est par ce procédé que les analystes ont fait progresser la science et si on examine le détail même de leurs démonstrations, on l'y retrouvera à chaque instant à côté du syllogisme classique d'Aristote », dit Poincaré dans son livre *La valeur de la science*. Mais, puisque sa validité ne peut être justifiée par la seule application des règles de la logique formelle, il serait satisfaisant de comprendre son origine afin qu'il soit autre chose qu'une convention utile ou un axiome supplémentaire. Il est clair que cette origine ne peut pas être expérimentale à cause du nombre infini d'étapes que renferme potentiellement un raisonnement par récurrence. Mais, dit Poincaré, « si l'expérience brute ne peut légitimer le raisonnement par récurrence, en est-il de même de l'expérience aidée de l'induction ? ». C'est en effet en accumulant un grand nombre d'observations que, selon ce principe de raisonnement, le physicien sera amené à énoncer une loi générale. « Mais une différence essentielle subsiste. L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même ». Poincaré n'y voit rien de moins que **« l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible »**.

Cette capacité relève de ce que Poincaré appelle l'« **intuition du nombre pur** ». Il la distingue de l'intuition qui fait appel aux sens ou à l'imagination et aussi, comme on vient de le voir, de l'intuition du physicien. Par exemple, quand nous cherchons à imaginer l'objet mathématique qu'est une droite, l'intuition sensible ne peut nous proposer qu'une visualisation approximative, sous forme par exemple d'une baguette, Seule l'intuition du nombre pur (pour ceux qui ont la chance de la posséder !) nous permettra de comprendre qu'une droite a une longueur infinie et une épaisseur nulle. De même, l'intuition sensible ne peut nous être d'aucun secours pour nous représenter une fonction partout continue et dérivable nulle part, alors que la construction explicite d'une telle fonction est mathématiquement possible.

> « L'intuition du nombre pur, celle d'où peut sortir l'induction mathématique rigoureuse, diffère de l'intuition sensible dont l'imagination proprement dite fait tous les frais. […] [J'affirme] une divergence essentielle entre les deux sortes d'intuition ; elles n'ont pas le même objet et semblent mettre en jeu deux facultés différentes de notre âme ; on dirait de

> deux projecteurs braqués sur deux mondes étrangers l'un à l'autre. […] C'est l'intuition du nombre pur, celle des formes logiques pures, qui éclaire et dirige ceux que nous avons appelés *analystes.*»

Tous ceux qui ont pratiqué les mathématiques connaissent bien ce moment trop rare où ce qui paraissait obscur et compliqué devient clair et simple. Très souvent, la phrase qui vient à l'esprit pour expliquer qu'on a compris est : « C'est évident ! », ce qui est paradoxal puisque la compréhension a souvent été précédée d'une –parfois longue– phase de perplexité.

> « Lorsqu'un mathématicien expose oralement une démonstration, le moment où il estime avoir atteint l'évidence se manifeste par son silence. [...] Ainsi les mathématiques sont un discours et ce discours a une étrange propriété: il convainc au moment où il se tait, parce que, parvenu à l'évidence, il ne sait plus quoi dire. »[3]

C'est souvent l'intuition qui a provoqué la découverte ; le raisonnement n'entre en scène que dans un deuxième temps, pour prouver que la conclusion énoncée peut effectivement être atteinte en n'utilisant que les raisonnements autorisés en mathématiques. Bien entendu, cette deuxième phase peut être très longue et réserver elle-même de nombreuses surprises, voire conduire à modifier l'intuition initiale.

> « Ainsi, la logique et l'intuition ont chacune leur rôle nécessaire. Toutes deux sont indispensables. La logique qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration : l'intuition est l'instrument de l'invention. »

**Les ouvrages de Poincaré sont accessibles sur *Gallica* en version numérisée :**

Poincaré, Henri (1902). *La science et l'hypothèse.*
`http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k26745q/f23.image.r=poincar%C3%A9%20henri`

Poincaré, Henri (1905). *La valeur de la science.*
`http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2071994.r=poincar%C3%A9%20henri`

**Les deux articles suivants approfondissent le sujet de la récurrence et exposent deux autres réponses au problème du fondement de l'induction mathématique, la réponse axiomatique de Peano et la réponse logiciste de Frege :**

Boniface, Jacqueline (2004). *Poincaré et le principe d'induction.*
`https://www.erudit.org/revue/philoso/2004/v31/n1/008937ar.html`

Egré, Paul (2015). *Le raisonnement par récurrence : quel fondement ?*
`http://smf4.emath.fr/en/Publications/Gazette/2015/146/smf_gazette_146_27-37.pdf`

[3] Nordon, Didier (1999). *Deux et deux font-ils quatre ? Sur la fragilité des mathématiques*.