Plus grand ou plus petit ?

On considère ici des variables aléatoires X, X_1, $X_2,\dots,X_n$, … *à valeurs dans* $\mathbb{N}$, *définies sur un même espace probabilisé* (Ω,T,P).

- **Plus grand** : $\forall k\in\mathbb{N}$, $(X\geq k)=(X=k)\cup(X\geq k+1)$

Comme les événements $(X=k)$ et $(X\geq k+1)$ sont *incompatibles*, on en déduit : $P(X\geq k)=P(X=k)+P(X=k+1)$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(X=k)=P(X\geq k)-P(X\geq k+1)}$$

Cette formule permet de calculer la loi de X si on connaît les probabilités $P(X\geq k)$ pour tout entier k.

Elle est utile pour $\boxed{X=\mathrm{Min}(X_1,X_2,\dots,X_n)}$ car, dans ce cas :

$$(X\geq k)=(X_1\geq k)\cap(X_2\geq k)\cap\dots\cap(X_n\geq k)$$

D'où, si les variables aléatoires $X_1,X_2,\dots,X_n$ sont *mutuellement indépendantes*,

$$\boxed{P(X\geq k)=P(X_1\geq k).P(X_2\geq k)\dots P(X_n\geq k)}$$

En sens inverse, si on connaît la loi de X, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \boxed{P(X\geq n)=\sum_{k=n}^{+\infty}P(X=k)}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)=1}\quad \text{et}\quad \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}P(X\geq k)=E(X)}$$

- **Plus petit** : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $(X\leq k)=(X=k)\cup(X\leq k-1)$

Comme les événements $(X=k)$ et $(X\leq k-1)$ sont *incompatibles*, on en déduit : $P(X\leq k)=P(X=k)+P(X\leq k-1)$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(X=k)=P(X\leq k)-P(X\leq k-1)}$$

Cette formule permet de calculer la loi de X si on connaît les probabilités $P(X\leq k)$ pour tout entier k.

Elle est utile pour $\boxed{X=\mathrm{Max}(X_1,X_2,\dots,X_n)}$ car, dans ce cas :

$$(X\leq k)=(X_1\leq k)\cap(X_2\leq k)\cap\dots\cap(X_n\leq k)$$

D'où, si les variables aléatoires $X_1,X_2,\dots,X_n$ sont *mutuellement indépendantes*,

$$\boxed{P(X\leq k)=P(X_1\leq k).P(X_2\leq k)\dots P(X_n\leq k)}$$

En sens inverse, si on connaît la loi de X, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \boxed{P(X\leq n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)}$$

Question : que pensez-vous de $\sum_{k=1}^{+\infty}P(X\leq k)$?