Passage à la limite et théorème des gendarmes : le match

Hypothèses : I est un intervalle, x_0 est un point de I ou une extrémité de I (éventuellement infinie).
f, g, h sont trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

• Passage à la limite dans un encadrement :

① On suppose : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)\ ,\ \forall x \in I$

② On suppose : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell'$, $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell''$, où ℓ, ℓ', ℓ'' sont trois nombres réels.

<u>Alors</u> : $\boxed{\ell \leq \ell' \leq \ell''}$. On dit que cet encadrement a été obtenu à partir de l'encadrement $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ par **passage à la limite** en x_0.

Remarque pratique : si on a un encadrement strict $g(x) < f(x) < h(x)$, $\forall x \in I$, *le passage à la limite donne la même conclusion :* $\ell \leq \ell' \leq \ell''$.

Pour passer à la limite dans un encadrement, il faut D'ABORD avoir prouvé l'existence des 3 limites ℓ, ℓ' et ℓ'' de f(x), g(x) et h(x) en x_0.

• Théorème des gendarmes :

① On suppose : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)\ ,\ \forall x \in I$

② On suppose : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.

<u>Alors</u> : $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell}$. Ce résultat est obtenu à partir de l'encadrement $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ par application du **théorème des gendarmes** en x_0.

Remarque pratique : si on a un encadrement strict $g(x) < f(x) < h(x)$, $\forall x \in I$, *le théorème des gendarmes donne la même conclusion :* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Lorsqu'on applique le théorème des gendarmes à un encadrement, il faut D'ABORD avoir prouvé l'existence des 2 limites de g(x) et h(x) en x_0, <u>et</u> il faut que ces deux limites soient égales à ℓ.

On ne sait PAS à l'avance que f(x) a une limite en x_0. Le théorème des gendarmes nous apprend que cette limite existe <u>et</u> qu'elle est égale à ℓ.