L'invention du calcul des probabilités

La "Géométrie du hasard" de Pascal

Blaise Pascal (1623-1662)

La date de naissance du calcul des probabilités est connue avec précision: durant l'été 1654, deux mathématiciens déjà célèbres, Blaise Pascal (à Paris) et Pierre de Fermat (à Toulouse), correspondent au sujet de problèmes posés par le chevalier de Méré.

Le chevalier de Méré est un homme du monde ; ses problèmes portent sur des jeux de hasard pour lesquels on mise de l'argent. Il y avait d'ailleurs de nombreuses discussions à l'époque entre esprits curieux qui s'intéressaient à ces problèmes. Elles ont laissé peu de traces, sans doute parce que, avant Pascal, nul ne pensait que l'étude du hasard pouvait mener à quelque chose de sérieux. Fermat lui-même n'était pas a priori intéressé mais son prestige parmi les mathématiciens de l'époque explique que Pascal ait eu besoin de discuter avec lui de ses idées et de ses méthodes inédites. Le génie de Fermat lui permit alors d'apporter rapidement une contribution importante.

Première lettre (non datée) de Pascal à Fermat (extrait)

Monsieur,

Je n'ai pas eu le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré, car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (c'est, comme vous savez, un grand défaut) et même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et je n'ai jamais pu l'en tirer. Si vous pouviez le faire, on le rendrait parfait.

Il me disait donc qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette raison :

Si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, *comme de* 671 *à* 625.

Si on entreprend de faire Sonnez avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en* 24.

Et néanmoins 24 *est à* 36 *(qui est le nombre des faces de deux dés) comme* 4 *à* 6 *(qui est le nombre des faces d'un dé).*

Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes.

* "Sonnez"=un double six

Le problème des partis

C'est un second problème du chevalier de Méré qui est véritablement à l'origine du calcul des probabilités. Il est connu sous le nom de "problème des partis" et fut pour la première fois exposé par écrit en 1509 par Lucas Pacioli. Pendant 145 ans il réapparaît sous la plume de différents auteurs italiens –sans qu'aucun n'en donne une solution satisfaisante. En 1654, le problème est enfin résolu par Pascal et Fermat.

Pascal avait la conviction qu'il inaugurait ainsi un nouveau domaine des mathématiques. Dans son *Adresse à l'Académie parisienne* de 1654, il donne un aperçu de ses travaux et annonce "un traité tout à fait nouveau, d'une matière absolument inexplorée jusqu'ici" qui peut "s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant: *la Géométrie du hasard* ". Pascal, d'après ses propres mots, est stupéfait de voir "la fortune incertaine si bien maîtrisée par l'équité du calcul".

La lettre de Pascal à Fermat reproduite ci-dessous est datée du 29 juillet 1654. Pascal y expose sa solution du problème des partis par une méthode dite de "pas à pas".

Le problème des partis : deux joueurs misent chacun 32 pistoles et jouent à croix et pile*. Le 1° joueur mise sur "croix", le 2° joueur mise sur "pile". Le jeu s'interrompt dès qu'on a obtenu 3 fois "croix"ou 3 fois "pile". Le gagnant empoche alors les 64 pistoles. Le problème est le suivant: la pièce a été lancée une fois et elle est tombée sur "croix". Pour une raison quelconque, le jeu doit s'interrompre brutalement. Comment répartir équitablement les 64 pistoles entre les deux joueurs ? Ce qu'on cherche est ***un partage fondé sur l'évaluation rigoureuse des espérances de gain de chacun des deux joueurs.***

* croix et pile=pile ou face

Note explicative : dans la lettre de Pascal il est question de "parties". Une partie est en fait une manche ; le jeu se joue donc en trois parties gagnantes.
En revanche, "parti" signifie "ce qu'une personne a pour sa part".

Deuxième lettre de Pascal à Fermat, datée du 29 juillet 1654 (extrait)

Monsieur ,

L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de CARCAVI, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des partis que celle des dés : j'avais vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de MÉRÉ, qui est celui qui m'a proposé ces questions et aussi M. de ROBERVAL : mais M. de MÉRÉ n'avait jamais pu trouver la juste valeur des partis ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvais seul qui eusse connu cette proportion.

Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche ; mais, parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots : car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu.

Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 : s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : "Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres". Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent auquel le premier aura deux parties et l'autre une.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : "Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi". Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : "Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 par la moitié, prenez en 12, et moi 12, qui, avec 32, font 44".

Au 3° paragraphe de cette lettre, Pascal fait référence à une précédente lettre (malheureusement perdue) envoyée par Fermat, où celui-ci résout le problème des partis par la méthode dite des "combinaisons". Cette méthode est heureusement aussi exposée dans une lettre ultérieure de Pascal à Fermat datée du 24 août.

La méthode des "combinaisons" consiste en un dénombrement de tous les déroulements possibles du jeu à partir de la 2° manche. Le jeu s'achève au plus tard à la 5° manche : il y a donc 2^4 =16 déroulements possibles. On constate que 11 conduisent à la victoire du 1° joueur et 5 à la victoire du 2° joueur. La conclusion est donc que le 1° joueur doit empocher 11/16 des 64 pistoles, ce qui fait… 44 pistoles.

Pierre de Fermat (1601-1665)

Le triangle de Pascal :

• Pascal a écrit un *Traité du triangle arithmétique*, publié après sa mort en 1665. Il y expose toutes les propriétés usuelles de ce que nous appelons aujourd'hui les coefficients binomiaux et explique le dénombrement des combinaisons. Mais, contrairement à Fermat, il répugne à utiliser ces coefficients dans les calculs relatifs aux jeux de hasard (*…la peine des combinaisons est excessive…*) –contrairement aussi à ce que nous faisons aujourd'hui. Il semble préférer les raisonnements, même longs, aux formules. C'est aussi dans ce *Traité du triangle arithmétique* qu'il invente le raisonnement par récurrence.

• Dans la nuit du 23 novembre 1654, Pascal aura une expérience mystique qui changera le cours de sa vie et le conduira entre autres à abandonner les mathématiques. Le traité de la *Géométrie du hasard* ne sera jamais publié…

Du dénombrement à la probabilité :

• Les méthodes inventées par Pascal et Fermat relèvent de ce qu'on appelle aujourd'hui la combinatoire car elles reposent sur des dénombrements.

Mais pour passer d'un dénombrement à une probabilité, il suffit de faire un quotient…

En langage moderne, si tous les cas sont équiprobables:

$$\text{probabilité d'un événement} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}$$

Si Ω est l'univers des événements et A l'événement qui nous intéresse: $p(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

• Dans une lettre à Pascal datée du 25 septembre 1654, Fermat est le premier à calculer une probabilité:

…le joueur peut gagner de deux façons. Or deux dés produisent 9 hasards. Le joueur a donc pour lui 2/9 des hasards, lorsqu'on joue deux parties*

*le dé utilisé ici a 3 faces.

Un peu plus loin, Fermat additionne trois "hasards" relatifs à trois situations distinctes:

…la somme des hasards qui font gagner ce joueur est par conséquent 1/3, 2/9 et 2/27, ce qui fait en tout 17/27.

Traduction:

si A, B et C sont trois événements incompatibles, $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$

→ Et depuis?

La théorie des probabilités telle que vous l'apprenez repose sur la théorie des ensembles et, à un niveau plus avancé, sur la théorie de la mesure. Elle a été mise au point dans les années 1920-1930 en URSS par Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov.