Matrices carrées et déterminants

Hypothèse : le nombre k et les nombres a_{ij} et b_{ij} ($1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$) sont réels ou complexes.

• Matrices carrées :

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$ sont des matrices carrées d'ordre n.

Ce sont des <u>tableaux de nombres</u>.

① A+B, kA, ${}^{t}A$ et AB sont des matrices carrées d'ordre n.

À savoir : ${}^{t}(kA) = k.{}^{t}A$, ${}^{t}(A+B) = {}^{t}A + {}^{t}B$ et $\boxed{{}^{t}(AB) = {}^{t}B.{}^{t}A}$

En général, $AB \neq BA$: le produit des matrices n'est pas une opération commutative.

② Si A est inversible, A^{-1} est une matrice carrée d'ordre n.

Elle vérifie l'égalité : $\boxed{A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n}$

③ Si A et B sont inversibles, AB est inversible et :

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

• Déterminants :

$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ et $\det(B) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$ sont des déterminants d'ordre n (*inutile de préciser qu'ils sont carrés ; un déterminant ne peut pas être rectangulaire !*).

Ce sont des <u>nombres</u>.

① Il n'y a **aucun** lien simple entre $\det(A+B)$ et $\det(A)+\det(B)$.

En revanche : $\boxed{\det(kA) = k^n.\det(A)}$, $\boxed{\det({}^{t}A) = \det(A)}$

et $\boxed{\det(AB) = \det(A).\det(B) = \det(B).\det(A) = \det(BA)}$.

② A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$, et $\boxed{\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}}$.

③ On déduit de ① et ② que, lorsque A et B sont des matrices semblables, c'est-à-dire vérifient une égalité $B = P^{-1}AP$, où P est une matrice carrée inversible d'ordre n, alors $\det(A) = \det(B)$.