Science étonnante

De la science étonnante, amusante, ou simplement intéressante

Le scandale des séries divergentes ! (ou le retour de 1+2+3+4+5+… = -1/12)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$$

(https://sciencetonnante.files.wordpress.com/2013/05/sum1.png)Il y a quelques mois, j'ai écrit ce billet (https://sciencetonnante.wordpress.com/2013/05/27/1234567-112/) au sujet de la somme 1+2+3+4+5+… Toutes proportions gardées, ce billet est à ce jour le plus controversé de ce blog, et il m'a valu une flopée de commentaires parfois moqueurs ou condescendants.

Il faut dire que j'y expliquais que même si cette somme est *a priori* infinie, il est malgré tout possible de lui affecter une valeur finie : -1/12. Pire, **on peut calculer cette valeur à partir de quelques manipulations heuristiques** en apparence totalement interdites.

Absurde ! Ridicule ! Et pourtant les maths qui se cachent derrière ce résultat provocateur sont tout à fait réelles : bienvenue dans le monde des **séries divergentes**. Comme je n'en avais pas beaucoup raconté dans le premier billet sur les concepts mathématiques concernés, cela faisait quelques temps que je songeais à faire une suite un peu plus consistante à ce billet infamant.

Or il se trouve que Bruce, qui anime la chaîne YouTube « *e-penser* » a récemment rallumé le feu avec une vidéo (http://www.youtube.com/watch?v=xPfBZGtDjoM) présentant le même calcul. Quelques jours plus tard, le célèbre blog anglophone Bad Astronomy (http://www.slate.com/blogs/bad_astronomy/2014/01/17/infinite_series_when_the_sum_of_all_ écrit également un billet sur ce calcul, et bien sûr c'est aussi l'indignation !

Timing parfait : j'ai décidé de m'y coller et d'expliquer vraiment de quoi il retourne. Nous allons donc voir pourquoi affecter la valeur -1/12 à la série 1+2+3+4+5+6+… n'est pas juste un canular d'un mec qui n'a rien compris aux maths, genre « *je montre 1=0 en cachant une division par zéro dans le raisonnement* ».

Affecter -1/12 à cette somme est possible sous certaines conditions, et les calculs heuristiques, quoique formellement faux, permettent étonnamment de retrouver cette valeur. Le pire : en physique on se sert de ce résultat en apparence absurde !

Petite mise en garde : En général, j'essaye dans mes billets de garder les connaissances nécessaires au niveau lycée. Aujourd'hui exceptionnellement, je vais taper un peu au-delà des maths du bac ! Si vous savez ce qu'est une série, ça peut aider…

Rappel des faits

Pour commencer, je voudrais rappeler les quelques petits calculs qui ont ému tant de monde. **Oui, je sais, ces calculs sont a priori illicites**, mais c'est précisément l'objectif de ce billet d'expliquer pourquoi ils ne le sont pas tant que ça. Alors ne partez pas au milieu !

Considérons la somme

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

A priori cette somme n'a pas de valeur bien définie. Essayons quand même de lui en donner une ! Pour cela, on peut noter que

$$\begin{aligned} A &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) \\ &= 1 - A \end{aligned}$$

Puisqu'on a A = 1-A, on peut déduire que **A=1/2**.

Passons maintenant à plus ambitieux, la somme

$$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

Même remarque, cette somme n'a en principe pas de valeur. Mais cette fois remarquons qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} B &= 1 - (2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \dots) \\ &= 1 - (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots) - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) \\ &= 1 - B - A \end{aligned}$$

On a donc 2B = 1-A, et puisqu'on connaît la valeur de A, on peut en déduire **B =1/4**.

Le gros morceau maintenant, on considère la bête immonde, la somme

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

On va cette fois soustraire B à S et obtenir :

$$\begin{aligned} S - B &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots) - (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots) \\ &= (4 + 8 + 12 + 16 + \dots) = 4S \end{aligned}$$

donc S = B + 4S qui nous amène à la conclusion que **S=-1/12**.

Stop ! **Arrêtez de hurler, je sais que tout cela est absurde** ! Je manipule des objets non-définis, les séries divergent, et je prétend qu'une somme de termes positifs peut être négative, etc. Du délire total, quoi !

Et pourtant, on peut donner un sens précis et rigoureux à tout ceci. Alors voyons comment !

Comment sommer un nombre infini de termes ?

Commençons à la base : l'addition des nombres réels. Si je vous demande d'additionner deux nombres, vous savez faire. Si je vous demande d'additionner 3 nombres, vous allez me dire : pareil ! Et pourtant…

Ca vous paraît peut-être naturel d'écrire et de calculer 1+2+3, mais ça n'est pas si immédiat ! Notez que pour avoir le droit de l'écrire de cette manière, sans parenthèses, **il faut invoquer l'associativité de l'addition**, c'est-à-dire que (1+2)+3 = 1+(2+3). Rappelez vous : l'addition n'est au départ définie que pour 2 nombres, et c'est parce qu'elle est associative qu'on peut l'étendre à une somme de plusieurs nombres en oubliant les parenthèses.

Considérons maintenant **une somme d'un nombre infini de termes**, par exemple

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + ...$$

Comment faites-vous pour calculer cette somme ? « *On prend le premier terme, on ajoute le second, puis le troisième, et ainsi de suite jusqu'au bout*. » Ca vous paraît évident ? Et pourtant ça ne l'est pas !

Il y a quelque chose d'absolument critique à comprendre : **RIEN dans la définition usuelle de l'addition ne nous dit comment on peut sommer un nombre infini de termes**. Cette somme est donc a priori un objet indéfini.

Pour lui affecter une valeur, il faut dire comment on fait. Ça n'est pas neutre, car cela signifie qu'il faut faire un choix. On dit que l'on va **définir une méthode de sommation**. C'est un point très important à saisir car tout le reste repose là-dessus.

La méthode de sommation la plus naturelle, c'est de prendre **la limite de la suite des sommes partielles**. Histoire d'être précis, je vais faire un peu de formalisme.

La méthode « naturelle »

On considère une suite a_n de nombres réels (pour simplifier), et on cherche à affecter à cette suite un nombre réel, que l'on veut associer intuitivement à la somme de tous les a_n. On veut donc construire une application (notons-là Σ), à valeur dans $\mathbb{R}$, et définie sur l'espace vectoriel des suites réelles (enfin au moins un sous-espace vectoriel) .

La manière naturelle de définir Σ, c'est de considérer la suite des sommes partielles

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

et de calculer sa limite quand n tend vers l'infini. Si cette limite existe et est finie, on dit que la série converge, et la limite est considérée comme étant « la valeur » de Σa_n :

$$\Sigma a_n \equiv \lim_{n\to\infty}(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

Voilà, j'ai décrit mon application Σ, et elle est définie sur un sous-ensemble de l'espace des suites réelles: celui pour lesquelles la limite de la suite des sommes partielles existe (notons le $\mathcal{C}$)

Je me répète : prendre la limite de la suite des sommes partielles est la manière la plus naturelle de faire, celle que l'on fait quand on dit *« on prend le premier terme, on ajoute le second et ainsi de suite »*, mais **il s'agit d'une définition, d'un choix**. Cette procédure ne découle pas « automatiquement » de l'addition usuelle.

Pour vous convaincre qu'il s'agit d'une extension de l'addition usuelle, en voici une conséquence étonnante : **quand on a une somme d'un nombre infini de termes, la valeur de la somme peut dépendre de l'ordre des termes** !

Bye bye la commutativité !

Vous le savez, quand on fait des additions, l'ordre ne compte pas : 1+2+3 = 3+1+2, par exemple. C'est une autre propriété de l'addition qui s'appelle **la commutativité**. C'est bien pratique, mais pour les sommes infinies, ça ne marche pas toujours !

Considérez par exemple cette somme, que l'on appelle la série harmonique alternée

$$H = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \ldots$$

c'est-à-dire la série de terme $a_n = (-1)^{n-1}/n$. On peut assez facilement montrer que la limite de la suite des sommes partielles vaut $ln(2)$. On a donc envie de dire qu'il s'agit là de LA valeur de cette somme infinie.

Et pourtant, si on change l'ordre des termes dans l'addition, on peut changer la valeur de la limite. Plus fort encore, on peut montrer qu'**on peut toujours changer l'ordre des termes pour la faire converger vers ce qu'on veut !**

Oui oui, vous lisez bien. Si vous réarrangez comme il faut les termes de cette série, vous pouvez la faire converger vers $\sqrt{42}/(e+\pi)$ si ça vous amuse. Et pire encore, ce résultat bizarre n'est pas du tout spécifique à cette série : il marche avec tout un tas d'autres !

*(Pour ceux qui font des maths post-bac : ça marche pour toutes les séries convergentes mais pas absolument convergentes. Ça n'est pas très difficile à démontrer, c'est une preuve constructive de la permutation, et cela porte le nom de **théorème de réarrangement de Riemann**.)*

Vous voyez donc que la définition « naturelle » d'une somme d'un nombre infini de termes est quand même loin d'être innocente, puisqu'**on y perd une propriété fondamentale de l'addition : la commutativité** !

D'autres méthodes de sommation ?

J'espère vous avoir convaincu que la méthode « usuelle » pour sommer des séries, d'une part est bien une définition (et donc résulte d'un choix); d'autre part n'est pas si gratuite que ça.

Clairement les trois séries que j'ai présenté au début (A, B et S) ne sont pas sommables par la méthode usuelle : leurs suites des sommes partielles ne convergent pas. On ne peut donc pas leur affecter un nombre fini par la méthode naturelle. Mais pourrait-on faire autrement ? **Existe-t-il d'autres méthodes de sommation que la méthode « naturelle » ?**

Je vous ai dit qu'on peut voir une méthode de sommation comme une application définie sur un sous-espace de l'espace vectoriel des suites réelles, et à valeur dans $\mathbb{R}$. Évidemment, on ne veut pas faire n'importe quoi, alors on va poser quelques conditions pour dire ce qu'est une méthode de sommation raisonnable.

La principale, c'est qu'**on aimerait trouver une méthode qui soit compatible avec la limite de la suite des sommes partielles.** On n'a pas envie de construire une méthode qui se mette à affecter de nouvelles valeurs aux séries convergentes ! En pratique, on cherche donc une application $\tilde{\Sigma}$ qui soit un prolongement de l'application Σ , c'est-à-dire :

- qui soit définie sur un espace plus large que l'espace $\mathcal{C}$ de définition de Σ;
- qui coïncide avec Σ sur $\mathcal{C}$.

La méthode de Cesaro

Une de ces méthodes, c'est **la méthode dite de Cesaro**. Au lieu de prendre la limite de la suite des sommes partielles, on prend la limite de la moyenne des sommes partielles, c'est-à-dire qu'on définit

$$\Sigma^C \ a_n \equiv \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_n).$$

J'ai appelé cette application Σ^C pour la distinguer de la méthode usuelle. Je vous laisse vous convaincre que cette méthode est bien un prolongement de Σ : elle est définie plus largement, mais pour toute série convergente, on retrouve le même résultat que la méthode usuelle.

Que nous apporte cette nouvelle méthode ? Prenez la série que je notais A au début de ce billet (qu'on appelle la série de Grandi, et qui n'est pas sommable par la méthode usuelle) **la méthode de Cesaro permet de lui affecter une valeur, et cette valeur est 1/2 !** Tiens, la même valeur que celle que l'on trouve avec les manipulations initiales…

La méthode d'Abel

Voyons une autre méthode un peu plus générique, qu'on appelle la méthode d'Abel. L'idée est de considérer la fonction définie par la série entière

$$f(x) = \sum a_n x^n \,,$$

et de voir si elle possède une limite quand x tend vers 1, ce qui formellement représente la somme $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$. Posons donc la définition de cette méthode de sommation, et appelons là Σ^A :

$$\Sigma^A \; a_n \equiv \lim_{x\to 1} \sum a_n x^n \,.$$

Voyons ce que ça donne avec la série que je notais B au début du billet. On définit la fonction

$$f(x) = \sum (-1)^{n-1} n x^n = -x \sum (-1)^n n x^{n-1}$$

Si vous êtes habitués à dériver des séries entières, je vous laisse vous convaincre qu'on a

$$f(x) = -x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{x}{(1+x)^2} \,.$$

Or vous voyez que **cette fonction se trouve bien définie pour x=1, et vaut 1/4…la même valeur que le calcul heuristique effectué sur B !**

Alors est-ce que les calculs du début de ce billet seraient quand même justes ?

Stabilité, linéarité, régularité

Non, « stabilité, linéarité, régularité », ça n'est pas une nouvelle devise pour le pays. Il s'agit de trois propriétés importantes que vérifient les deux méthodes de sommation que j'ai présentées ci-dessus :

La régularité, c'est le fait qu'une méthode coïncide avec la méthode usuelle sur les sous-espaces où elles sont toutes les deux définies. Nous en avons parlé.

La linéarité, c'est le fait que l'opérateur de sommation soit linéaire dans l'espace vectoriel des suites, c'est-à-dire que si on attribue la valeur A à la série de terme a_n et la valeur B à la série de terme b_n , alors on attribue la valeur $\lambda A + B$ à la série de terme $\lambda a_n + b_n$, pour λ un scalaire.

La stabilité, c'est le fait que l'on puisse toujours sortir un nombre fini de termes en tête de la série, de sorte que

$$\Sigma a_n = (a_0 + a_1 + \ldots + a_K) + \Sigma a_{n+K}$$

Maintenant, reprenez les calculs du début de ce billet. Si vous les observez attentivement, vous observerez qu'ils ne se basent que sur ces 3 propriétés !

Cela signifie que si on suppose qu'il existe une méthode de sommation stable, linéaire et régulière permettant de sommer la série, alors ces calculs sont valides et conduisent à la bonne valeur !

Pour vous le prouver, je vais récrire le premier calcul de manière tout à fait licite. Supposons qu'une méthode de sommation $\tilde{\Sigma}$ existe pour la suite (1,-1,1,-1,1,…), et que cette méthode soit stable, linéaire et régulière.

Alors on a :

$$\begin{aligned} A &= \tilde{\Sigma}(1,-1,1,-1,...) \\ &= 1+\tilde{\Sigma}(-1,1,-1,+1,...) \quad \text{Stabilite} \\ &= 1-\tilde{\Sigma}(1,-1,1,-1,...) \quad \text{Linearite} \\ &= 1-A \end{aligned}$$

Vous voyez donc que le calcul heuristique sur A mené au début de ce billet est parfaitement légal, pour peu que l'on sache exactement ce qu'on fait ! Et on n'a le droit de n'utiliser que la stabilité et la linéarité. Notamment **toute opération de reparenthèsage est interdite, ou toute modification de l'ordre des termes de la série.** Ces manipulations en apparence innocentes sont interdites si on veut que les calculs « heuristiques » donnent un résultat sensé. Et bien sûr, ces calculs ne sont licites que si on sait par avance qu'une méthode de sommation stable et linéaire existe pour la série que l'on regarde. Mais **si une telle méthode existe, alors le calcul heuristique est licite, et il donne la bonne réponse** !

(Je laisse en exercice au lecteur de montrer que le calcul heuristique de B est valide lui-aussi. Attention à bien utiliser la linéarité : on n'a le droit que de sommer terme à terme !)

La régularisation par la fonction zeta

Un cas que je n'ai pas encore traité, c'est celui de la somme 1+2+3+4+5…Pour cette série, les méthodes d'Abel ou de Cesaro ne fonctionnent pas. Mais pour autant il existe une méthode de sommation qui fonctionne ! Pour une série de germe général a_n, on définit

$$f(s) = \sum \frac{a_n}{n^{s+1}},$$

et on cherche si cette fonction (définie dans le plan complexe) admet une valeur ou un prolongement analytique en $s=-1$. Pour la série 1+2+3+4+5+…, avec $a_n = n$ on obtient la fameuse fonction dite « zeta » de Riemann. Cette fonction est définie de la manière suivante

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}.$$

Or cette fonction admet bien un prolongement analytique en $s=-1$, c'est-à-dire que formellement elle attribue une valeur à la série divergente $\sum n$! **Or il se trouve que ce prolongement analytique $\zeta(-1)$ a pour valeur -1/12, comme pour le calcul heuristique !**

Il existe une autre méthode de sommation, dite de **Ramanujan**, qui par une procédure différente associe aussi la valeur -1/12 à cette série divergente (voir ici (http://en.wikipedia.org/wiki/Ramanujan_summation)). Vous voyez donc qu'il existe plusieurs méthodes de sommation bien définies qui affectent cette valeur à la série $\sum n$. Si l'on sait de quoi on parle, tout cela est donc bien raisonnable !

Et pourtant, tout n'est pas clair pour autant, en tout cas pour moi !

Quelques questions ouvertes (pour moi)

A ce stade, on a envie de dire que la méthode de la fonction ζ et la méthode de Rammanujan justifient le calcul heuristique de 1+2+3+4+5+…=-1/12.

Et pourtant il y a un hic. Dans le billet précédent, un généreux commentateur (nommé « Matheux ») m'a pointé le calcul suivant. Supposons qu'il existe effectivement une méthode de sommation $\tilde{\Sigma}$ régulière, stable et linéaire définie pour (1,2,3,4,5,…), et qui lui assigne la valeur S, on a alors par stabilité :

$$\begin{aligned} S &= \tilde{\Sigma}(1,2,3,4,5,\ldots) \\ S &= \tilde{\Sigma}(0,1,2,3,4,\ldots) \\ S &= \tilde{\Sigma}(0,0,1,2,3,\ldots) \end{aligned}$$

Mais en additionnant la première ligne, la troisième et -2 fois la seconde (linéarité), on trouve

$$0 = \tilde{\Sigma}(1,0,0,0,0,\ldots) = 1$$

Ce qui est contradictoire !

Ce calcul montre donc qu'**il ne peut pas exister de méthode régulière, stable et linéaire qui soit définie pour 1+2+3+4+5+…**(perso je n'ai vu écrit ce résultat nulle part ailleurs) En particulier les méthodes de Ramanujan et de la fonction zeta ne peuvent donc pas vérifier ces 3 conditions. Laquelle n'est pas satisfaite ? Je n'en suis pas sûr, mais je pense que c'est la linéarité. (Quelqu'un a une idée ?)

Est-ce à dire qu'il n'existe pas de manière unique d'assigner une valeur à cette série divergente ? Pourtant il est fascinant de voir que la méthode de la fonction ζ, la méthode de Ramanujan et la méthode heuristique trouvent toutes la même valeur ! *(Au passage, dans mon calcul heuristique, je viole une des 3 conditions, saurez-vous retrouver laquelle et où ?)*

Peut-on d'une manière ou d'une autre dire que cette valeur est unique ? Ou qu'elle correspond à un groupe d'hypothèses bien définies ? Ca serait bien, car comme je l'expliquais dans mon premier billet (https://sciencetonnante.wordpress.com/2013/05/27/1234567-112/), **la valeur de**

-1/12 est utilisée dans quelques modèles de physique théorique, et notamment c'est elle qui détermine les fameuses dimensions supérieures de la théorie des cordes.

Une piste pour cela, si on voulait appliquer la méthode d'Abel à la série 1+2+3+4+…, il faudrait définir

$$f(x) = \sum nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Cette fonction n'admet pas de prolongement en x=1 (Abel ne marche donc pas), mais si on pose $x = e^{-h}$, on obtient en $h \to 0$:

$$\frac{1}{h^2} - \frac{1}{12} + \frac{h^2}{240} + \dots$$

On voit qu'une fois ôté le terme singulier inital, on retombe sur -1/12 en h=0 c'est-à-dire x=1. Ca doit plus ou moins correspondre à ce qui se passe avec la formule de MacLaurin (voir mon billet précédent)

$$\sum_n f(n) - \int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{12}f'(0) + \dots$$

qui quand on l'applique (illégalement) à la fonction $f(x) = x$ donne :

$$\left(\sum_n n - \int x\ dx\right) = -1/12$$

On retombe sur le -1/12, et la soustraction de l'intégrale à la somme doit physiquement bien correspondre à ce qu'on fait en théorie quantique des champs pour se débarrasser des infinis dus aux énergies de point zéro. Donc **les méthodes de Rammanujan ou de zeta sont certainement physiquement justifiables !**

En conclusion :

- Il est possible d'affecter formellement des valeurs à certaines séries divergentes sous certaines conditions
- Ceci produit des méthodes mathématiques utiles pour aborder certains problèmes physiques.

N'est-ce pas tout ce qu'on demande aux maths ?

Si vous êtes arrivés jusqu'ici, bravo ! En tout cas vous voici maintenant du côté obscur, car Abel lui-même disait en 1826:

> *Les séries divergentes sont une invention du diable et c'est une honte qu'on ose fonder sur elles la moindre démonstration. On peut tirer d'elles tout ce qu'on veut quand on les emploie et ce sont elles qui ont produit tant d'échecs et tant de paradoxes. (…) Mes amis, voici quelque chose dont il faut se moquer.*

Quelques références en vrac :

- Un excellent billet de Terence Tao (http://terrytao.wordpress.com/2010/04/10/the-euler-maclaurin-formula-bernoulli-numbers-the-zeta-function-and-real-variable-analytic-continuation/) qui donne des réponses à plusieurs questions qui se posent à la fin de ce