Les deux formules du professeur Taylor

Soit I un intervalle, x_0 un point de I, et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Soit n un entier naturel.

• Formule de Taylor-Young :

Si f est n fois dérivable en x_0, alors :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \circ((x-x_0)^n)}$$

Remarque : Le terme $\circ((x-x_0)^n)$ peut s'écrire $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Attention : Même si la formule est valable en tout point x de I, elle n'a d'intérêt que **lorsque x est « proche » de x_0**. En particulier, si k_0 est le plus petit indice pour lequel $f^{(k_0)}(x_0) \neq 0$, on a : $f(x) \underset{x_0}{\sim} \frac{f^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}(x-x_0)^{k_0}$

En pratique, la formule de Taylor-Young sert essentiellement à calculer le **développement limité à l'ordre n de f en x_0**. Elle permet donc par exemple des **calculs de limites lorsque x tend vers x_0**.

• Formule de Taylor à reste intégral :

Si f est de classe C^{n+1} sur I, alors :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}$$

Remarque : Si f est un polynôme P de degré n, les deux formules de Taylor se confondent et on a :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

En pratique, à partir de la formule de Taylor à reste intégral, on peut **calculer des égalités ou des inégalités**.

Exemple : si $\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \geq 0$, on obtient cette inégalité, ***valable pour tout x de I, même « loin » de x_0*** *:*

$$f(x) \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

[Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$]