Le désespoir du prof de maths

Linguistique, argumentation et mathématiques

La *linguistique pragmatique* s'intéresse non à la structure interne du langage, mais à son interaction avec le monde qui nous entoure. Elle prend en compte le langage en tant qu'il permet de construire un discours, lequel discours est porté par un locuteur, inséré dans un contexte et destiné à produire des effets[1]. Dans ce cadre, le linguiste Ducrot s'est intéressé aux phénomènes d' « argumentation dans la langue » (titre d'un de ses ouvrages). Pour lui, « l'argumentation est (…) une relation de nature discursive établie entre un argument et une conclusion, et dans laquelle l'argument vise à faire admettre la conclusion »[2]. Mais… ceci ne vous fait-il pas penser au discours du prof de maths ?

Comme nous l'avons vu précédemment, Ducrot a énoncé la *loi d'exhaustivité* selon laquelle, lors d'une conversation, « le locuteur donne, sur le thème dont il parle, les renseignements les plus forts qu'il possède, et qui sont susceptibles d'intéresser le destinataire ». Et il a trouvé au moins un problème pédagogique dont cette loi fournit une explication.

Le glissement de la condition suffisante à la condition nécessaire

> « Un phénomène linguistico-psychologique bien connu (…) désespère les enseignants préoccupés de former leurs élèves à un minimum de pensée logique. Alors qu'on voudrait réserver l'expression *si p, q* pour indiquer que *p* est une condition suffisante de *q*, les élèves (…) tendent à comprendre la même expression comme désignant une condition non seulement suffisante mais nécessaire –ou, au moins, très favorable. La loi générale d'exhaustivité (…) permet de prévoir cette interprétation »[3].

En effet, à l'écoute ou à la lecture d'une phrase exprimant une implication $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$, la loi d'exhaustivité nous incite à penser que, si l'auteur a posé $\mathscr{P}$ avant d'affirmer $\mathscr{Q}$, cette condition $\mathscr{P}$ représente le « meilleur » choix qu'il pouvait faire. De là, on en vient à se dire qu'il n'est pas possible d'affirmer $\mathscr{Q}$ sans affirmer préalablement $\mathscr{P}$ et donc que $\mathscr{P}$ est non seulement une condition suffisante, mais aussi une condition nécessaire de $\mathscr{Q}$, autrement dit que $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$. Et voilà comment $\mathscr{P}$ qui était une condition suffisante de $\mathscr{Q}$ se retrouve en être aussi une condition nécessaire –ce qui est très souvent logiquement faux !

Par exemple, lorsque je vous informe que « si la série $\sum u_n$ converge, alors $(u_n) \to 0$ », c'est-à-dire que

$$\mathscr{P}=\sum u_n \ \textit{converge} \Rightarrow \mathscr{Q}=(u_n) \to 0\,,$$

[1] Exemple ultra-classique : « Je vous déclare mari et femme ». Cette simple déclaration produit des effets très concrets et très durables (dans le meilleur des cas…).

[2] Martine Bracops (2010), *Introduction à la pragmatique*, éditions De Boeck-Duculot, p. 176.

[3] Oswald Ducrot (1991), *Dire et ne pas dire*, éditions Hermann , p. 169-170.

vous êtes tentés de croire que

$$\mathscr{Q}=(u_n)\to 0 \Rightarrow \mathscr{P}=\sum u_n \textit{ converge.}$$

Hélas, c'est faux : si $u_n = 1/n$, $(u_n)\to 0$ mais $\sum u_n$ diverge.

Le problème est qu'on peut trouver beaucoup de propositions impliquant $\mathscr{Q}$, sans pour autant qu'il y en ait une « meilleure » que les autres. Par exemple, il est vrai que

$$\mathscr{P}'=\sum (u_n)^2 \textit{ converge} \Rightarrow \mathscr{Q}=(u_n)\to 0$$

mais il n'y a aucune implication entre $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$: pour $u_n = 1/n$, on a $\mathscr{P}'$ et *non*-$\mathscr{P}$, donc $\mathscr{P}'$ n'entraîne pas $\mathscr{P}$; alors que, pour $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, on a $\mathscr{P}$ et *non*-$\mathscr{P}'$, donc $\mathscr{P}$ n'entraîne pas $\mathscr{P}'$.

Aucune des deux conditions $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{P}'$ n'est donc « meilleure » que l'autre pour affirmer $\mathscr{Q}$. La loi d'exhaustivité nous incite à croire à l'existence d'une condition « meilleure » que toutes les autres… qui n'existe pas forcément !

Loi d'exhaustivité plus recherche de la facilité

Même quand cette condition existe, c'est-à-dire qu'on a trouvé une proposition $\mathscr{P}$ telle que $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$, les effets de la loi d'exhaustivité conjugués à un peu de paresse intellectuelle peuvent nous amener à sélectionner une proposition $\mathscr{P}'$ plus simple qui n'est qu'une condition suffisante de $\mathscr{Q}$ ($\mathscr{P}' \Rightarrow \mathscr{Q}$), et à affirmer faussement que $\mathscr{P}' \Leftrightarrow \mathscr{Q}$. Ainsi au chapitre « Réduction des endomorphismes », nous avons vu deux critères de diagonalisabilité des matrices. Puis nous avons vu une condition suffisante de diagonalisabilité : $\mathscr{P}'$=*La matrice A d'ordre n possède n valeurs propres simples* $\Rightarrow \mathscr{Q}$=*A est diagonalisable.* Comme les deux critères de diagonalisabilité sont plus compliqués à retenir que $\mathscr{P}'$, il est tentant de penser que $\mathscr{P}' \Leftrightarrow \mathscr{Q}$. Mais c'est faux !

Autre exemple : soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = f(n)$. On a :

$$\mathscr{P}=\forall n\in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow \mathscr{Q}=(u_n) \textit{ est décroissante}$$

et il est vrai que

$$\mathscr{P}'=f \textit{ est décroissante} \Rightarrow \mathscr{Q}=(u_n) \textit{ est décroissante,}$$

On peut avoir envie de dire que $\mathscr{P}' \Leftrightarrow \mathscr{Q}$ mais c'est faux. **Pouvez-vous donner un contre-exemple ?**