THÉORÈME D'INTÉGRATION PAR CONVERGENCE DOMINÉE vs. THÉORÈME D'INTÉGRATION PAR CONVERGENCE UNIFORME

$(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes. Pour que les deux théorèmes puissent s'appliquer, on suppose que les fonctions f_n sont continues sur un segment $[a,b]$. Or toute fonction continue définie sur un segment est bornée. Donc pour tout $n \geq 0$ f_n est bornée sur $[a,b]$ et on peut définir sa norme infinie : $\|f_n\| = \sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)|$. En outre f_n est intégrable sur $[a,b]$.

Intégration par convergence dominée :

Les hypothèses sont : la suite (f_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f continue (par morceaux) sur $[a,b]$ <u>et</u> il existe une fonction φ continue (par morceaux) sur $[a,b]$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a,b],\ |f_n(t)| \leq \varphi(t)$.

Alors : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt}$

Intégration par convergence uniforme :

L'hypothèse est :

$\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément vers f sur } [a,b]}$.

Alors : f est continue,

et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt}$

Lien entre les deux théorèmes : Si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, f est continue sur $[a,b]$, donc bornée. Donc $\|f\|$ existe. En outre, puisque la suite numérique $\|f_n - f\|$ tend vers 0, elle est bornée : $\exists K \in R^+ / \|f_n - f\| \leq K$. Ceci entraîne $\|f_n\| - \|f\| \leq K$, soit $\|f_n\| \leq \|f\| + K$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée en choisissant $\varphi(t) = \|f\| + K$, $\forall t \in [a,b]$.

Conclusion : <u>pour une suite de fonctions définies sur un segment</u>, si on peut appliquer le théorème d'intégration par convergence uniforme, alors on peut appliquer le théorème d'intégration par convergence dominée.