THÉORÈME D'INTÉGRATION TERME A TERME vs. THÉORÈME D'INTÉGRATION PAR CONVERGENCE NORMALE

$(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes. Pour que les deux théorèmes puissent s'appliquer, on suppose que les fonctions f_n sont continues sur un segment $[a,b]$. Or toute fonction continue définie sur un segment est bornée. Donc pour tout $n \geq 0$ f_n est bornée sur $[a,b]$ et on peut définir sa norme infinie : $\|f_n\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x)|$. En outre f_n est intégrable sur $[a,b]$.

Intégration terme à terme :

Les hypothèses sont : la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[a,b]$, la somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue (par morceaux) sur $[a,b]$

et $\boxed{\text{la série numérique } \sum \int_a^b |f_n(x)|dx \text{ converge}}$.

Alors : la série $\sum \int_a^b f_n(x)dx$ converge,

et $\boxed{\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx}$

Intégration par convergence normale :

L'hypothèse est :

$\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement sur } [a,b]}$.

Alors : S est continue, la série $\sum \int_a^b f_n(x)dx$ converge,

et $\boxed{\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx}$

Lien entre les deux théorèmes : $\forall x \in [a,b]$, $|f_n(x)| \leq \|f_n\|$, d'où : $\int_a^b |f_n(x)|dx \leq (b-a).\|f_n\|$. Si on suppose que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$, c'est-à-dire que $\sum \|f_n\|$ converge, la majoration ci-dessus prouve que $\sum \int_a^b |f_n(x)|dx$ converge.

Conclusion : <u>pour une suite de fonctions définies sur un segment</u>, si on peut appliquer le théorème d'intégration par convergence normale, alors on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme.