Sœurs, mais pas jumelles : INTÉGRALE(S) et PRIMITIVES

Hypothèses : I est un intervalle, a est un point de I, f est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.

Intégrale sur un segment :

★ Étant donné deux points a et b de I, l'**intégrale** de f entre a et b est un **nombre**, noté $\boxed{\int_a^b f(t)dt}$.

★ Formule :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) \text{, où } G \text{ est \underline{une} primitive de f.}}$$

Remarque : Si F est la primitive de f qui s'annule en a [cf. ci-dessous], on a bien entendu $\int_a^b f(t)dt = F(b)$.

PrimitiveS sur un intervalle :

★ Étant donné un point a de I, la **fonction** $\boxed{F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt}$ est une **primitive** de f sur I et, plus précisément, c'est la primitive de f qui s'annule en a.

Toute autre primitive de f s'écrit $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt + C$, où C est une constante réelle quelconque.

★ Le résultat précédent peut s'exprimer sous forme du

Théorème fondamental de l'intégration :

La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est de classe C^1 sur I et :

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$$

C'est une erreur commune, mais néanmoins regrettable, que d'écrire $F'(x) = f(x) - f(a)$. Regardez les calculs ci-dessus ; RIEN ne justifie que f(a) apparaisse dans cette formule de dérivation.

★ Notation utile mais délicate : on convient d'écrire $\int f(x)dx$ **toute primitive** de f sur I. On a donc : $\int f(x)dx = F(x) + C$

Exemple : $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$