In… dépendants ou in… compatibles ?

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. On rappelle les deux formules suivantes : (1) $\forall (A,B) \in T^2, \ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(2) $\forall (A,B) \in T^2$, si $P(A) > 0$, $P(A \cap B) = P(B / A).P(A) = P_A(B).P(A) = P(A / B).P(B) = P_B(A).P(B)$

• Événements incompatibles :

⋆ <u>Définition</u> : Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

⋆ <u>Propriété</u> : d'après (1), si A et B sont <u>incompatibles</u>,

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

⋆ <u>Condition d'additivité</u> : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements <u>deux à deux incompatibles</u>, alors :

$$\sum P(A_n) \text{ converge et } \boxed{P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)}$$

⋆ <u>Cas particulier</u> : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est un système complet d'événements, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

• Événements indépendants :

⋆ <u>Définition</u> : Deux événements A et B sont dits **indépendants** si $\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$.

⋆ <u>Propriété</u> : d'après (2), si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$,

A et B sont <u>indépendants</u>

$$\Updownarrow$$

$$P(B) = P(B / A) = P_A(B)$$

$$\Updownarrow$$

$$P(A) = P(A / B) = P_B(A)$$

⋆ <u>Propriété</u> : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une famille d'événements <u>mutuellement indépendants</u>, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \prod_{k=0}^{n} P(A_k)}$$

• <u>Remarque</u> : Lorsque $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, si A et B sont indépendants, on a $P(A \cap B) = P(A).P(B) > 0$, donc A et B ne sont PAS incompatibles. De même, si A et B sont incompatibles, comme $P(A \cap B) = 0$, $P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$, donc A et B ne sont PAS indépendants.