Équivalentes, mais différentes

L'adjectif « équivalent » est abondamment utilisé dans les textes mathématiques. Il convient donc de ne pas confondre ses diverses occurrences, ni d'attribuer aux relations d'équivalence des propriétés imaginaires. Deux d'entre elles figurent au programme de PC.

• Équivalences de matrices :

⋆ Définition : Deux matrices A et B de même taille sont dites **équivalentes par lignes** s'il est possible de transformer A en B par utilisation des trois opérations élémentaires sur les lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$, et $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ avec $i \neq j$).

On note : $\boxed{A \underset{L}{\sim} B}$

⋆ Propriétés : La relation d'équivalence de matrices par lignes est :

- ***réflexive*** : $A \underset{L}{\sim} A$
- ***symétrique*** : $A \underset{L}{\sim} B$ entraîne $B \underset{L}{\sim} A$
- ***transitive*** : $A \underset{L}{\sim} B$ et $B \underset{L}{\sim} C$ entraîne $A \underset{L}{\sim} C$

⋆ Utilisation : $\boxed{\text{Si } A \underset{L}{\sim} B,\ rg(A) = rg(B)}$

En outre, les deux sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par les vecteurs-lignes de A et les vecteurs-lignes de B sont identiques.

Si $A \underset{L}{\sim} B$, en général $\det(A) \neq \det(B)$, $Ker(A) \neq Ker(B)$, $Im(A) \neq Im(B)$, $Sp(A) \neq Sp(B)$, bref rien (autre que le rang) n'est identique entre A et B.

• Équivalences de fonctions :

⋆ Définition : Deux fonctions f et g définies (et ne s'annulant pas) au voisinage d'un point x_0 sont dites **équivalentes au voisinage de x_0** si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note : $\boxed{f \underset{x_0}{\sim} g}$

⋆ Propriétés : La relation d'équivalence de fonctions est :

- ***réflexive*** : $f \underset{x_0}{\sim} f$
- ***symétrique*** : $f \underset{x_0}{\sim} g$ entraîne $g \underset{x_0}{\sim} f$
- ***transitive*** : $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$ entraîne $f \underset{x_0}{\sim} h$

⋆ Utilisation : Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si f a une limite en x_0,

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)}$$

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$, on ne peut pas affirmer que $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x)\right) = 0$ et on ne peut pas savoir si $f(x) \leq g(x)$ ou $f(x) \geq g(x)$.