Développements limités et illimités

• Développements limités en 0 :

Soit I un intervalle contenant 0 et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

★ Formule de Taylor-Young :

Si f est de classe C^∞ sur I, alors :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f a un développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \circ(x^n)$$

(ii) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \circ(x^n)}$

Remarque : Le terme $\circ(x^n)$ peut s'écrire $x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Le *développement limité à l'ordre n* permet donc de dire que $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est, **pour chaque valeur de n**, une approximation de $f(x)$, de plus en plus précise lorsque **x tend vers 0** (et sans intérêt si x est « loin » de zéro).

• Développements en série entière :

Soit $I = \left]-r,r\right[$, avec $r > 0$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

★ Développement en série de Taylor :

Si la fonction f est développable en série entière sur I, c'est-à-dire s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que : $\forall x \in I$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors :

(i) f est de classe C^∞ sur I

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Donc : $\boxed{\forall x \in I,\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$

Remarque : On peut s'écrire : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$, où $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

Le *développement en série entière* permet donc de dire que, **pour tout $x \in I$**, $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est une approximation de $f(x)$, de plus en plus précise lorsque **n tend vers $+\infty$**.