Deux déterminants faux-amis

Hypothèses : α et β sont des nombres réels ou complexes ; n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

• À ma gauche :

Soit $D_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & & \vdots \\ \beta & \beta & \alpha & \ddots & \beta \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix}$, défini pour $n \geq 2$.

Il est possible de calculer directement D_n. Pour cela on effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \ldots + L_n$, puis les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 - C_1, \ldots, C_n \leftarrow C_n - C_1$.

On obtient : $\boxed{\forall n \geq 2,\ D_n = (\alpha + (n-1)\beta)(\alpha - \beta)^{n-1}}$

Cette formule reste valable pour $n = 1$ en convenant que $D_1 = \alpha$.

♦ <u>Polynôme caractéristique</u> :

$\chi_{D_n}(X) = \begin{vmatrix} X-\alpha & -\beta & -\beta & \cdots & -\beta \\ -\beta & X-\alpha & -\beta & & \vdots \\ -\beta & -\beta & X-\alpha & \ddots & -\beta \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\beta \\ -\beta & \cdots & -\beta & -\beta & X-\alpha \end{vmatrix}$ est un déterminant de même type que D_n, donc $\chi_{D_n}(X) = (X - (\alpha + (n-1)\beta)(X - (\alpha - \beta))^{n-1}$

On en déduit que les valeurs propres de D_n sont la valeur propre simple $\alpha + (n-1)\beta$ et la valeur propre $\alpha - \beta$ de multiplicité $n-1$.

• À ma droite :

Soit $\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{vmatrix}$, défini pour $n \geq 2$.

Il n'est pas possible (sauf cas particulier simple) de calculer directement Δ_n, mais, en le développant par rapport à sa première colonne, on obtient une formule de récurrence :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta^2\Delta_{n-2}}$$

Il ne reste plus qu'à calculer les racines de l'équation caractéristique $x^2 - \alpha x + \beta^2 = 0$, ce qui permet d'exprimer Δ_n en fonction de ces racines, de n et de deux constantes C_1 et C_2. Pour finir, on calcule C_1 et C_2 à l'aide des deux conditions initiales $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_1 = \alpha$.

♦ <u>Polynôme caractéristique</u> :

$\chi_n(X) = \chi_{\Delta_n}(X)$ est un déterminant de même type que Δ_n. Il vérifie donc la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 2,\ \chi_n(X) = (X - \alpha)\chi_{n-1}(X) - \beta^2\chi_{n-2}(X)$$