Déterminant et trace d'une matrice carrée

On considère deux matrices carrées d'ordre n, $A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ et $B=\left(b_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$. Les nombres a_{ij} et b_{ij} ($1\le i\le n$, $1\le j\le n$), ainsi que le nombre k, sont réels ou complexes.

A+B, kA, ${}^{t}A$ et AB sont des matrices carrées d'ordre n. Si A est inversible, A^{-1} est une matrice carrée d'ordre n.

• Déterminant :

① Trois formules simples :

$$\boxed{\det(kA)=k^{n}.\det(A)}\ ,\quad \boxed{\det({}^{t}A)=\det(A)}$$

et $\boxed{\det(AB)=\det(A).\det(B)=\det(B).\det(A)=\det(BA)}$.

② Il n'y a **aucun** lien simple entre $\det(A+B)$ et $\det(A)+\det(B)$.

③ Lorsque A et B sont des matrices semblables, c'est-à-dire vérifient une égalité $B=P^{-1}AP$, où P est une matrice carrée inversible d'ordre n, alors $\det(A)=\det(B)$.

preuve :

$$\begin{aligned} det(B) &= det(P^{-1}AP)=det(P^{-1}).det(A).det(P)\\ &= \frac{1}{det(P)}.det(A).det(P)=det(A)\end{aligned}$$

• Trace :

① Trois formules simples :

$$\boxed{Tr(kA)=k.Tr(A)}\ ,\quad \boxed{Tr({}^{t}A)=Tr(A)}$$

et $\boxed{Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)}$.

② Bien que, en général $AB\neq BA$, on a : $\boxed{Tr(AB)=Tr(BA)}$

Mais il n'y a **aucun** lien entre $Tr(AB)$ et $Tr(A).Tr(B)$.

③ Lorsque A et B sont des matrices semblables, c'est-à-dire vérifient une égalité $B=P^{-1}AP$, où P est une matrice carrée inversible d'ordre n, alors $Tr(A)=Tr(B)$.

preuve :

$$\begin{aligned} Tr(B) &= Tr(P^{-1}AP)=Tr(P^{-1}(AP))=Tr((AP)P^{-1})\\ &= Tr(A(PP^{-1}))=Tr(AI_n)=Tr(A)\end{aligned}$$