Dérivation et égalité des accroissements finis

• Dérivation d'une fonction :

Soit I un intervalle, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I.

Étant donné un autre point x de I, le **taux d'accroissement** de f entre x_0 et x est $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

★ **<u>Dérivabilité</u> de f en x_0 :**

On dit que f est **dérivable en x_0** si :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)}$$

Le nombre $f'(x_0)$ est appelé la **dérivée de f en x_0**.

On n'a en général aucune égalité entre le taux d'accroissement et la dérivée :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq f'(x_0)$$

La dérivée en x_0 est la <u>limite</u> du taux d'accroissement en x_0. Cette limite est a priori indéterminée, et elle peut, bien entendu, être infinie ou ne pas exister ; dans ces deux derniers cas, f n'est pas dérivable en x_0.

• Égalité des accroissements finis :

Soit I un intervalle, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, a et b deux points de I tels que $a<b$.

Le **taux d'accroissement** de f entre a et b est $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

★ **<u>Égalité des accroissements finis</u> pour la fonction f entre deux points a et b :**

Si la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, il existe un point c appartenant à $]a,b[$ tel que : $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)}$

<u>Remarques</u> :

- Rien n'interdit que f soit aussi dérivable en a et en b, mais ce n'est pas indispensable.

- Bien noter que $a<c<b$. Donc, si, par exemple, f' est strictement croissante, $f'(a)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$.

- Dans l'égalité des AF, il n'y a <u>pas de passage à la limite</u> ; a et b sont fixes. Exemple classique : $a=n$, $b=n+1$, $f=\ln$; on obtient : $\dfrac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln(n)<\dfrac{1}{n}$