Avec ou sans le théorème de convergence dominée ?

• Sans !

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\boxed{I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}}$. I_n est une intégrale simple.

On remarque que : $\forall t \in [0,1]$, $1 - t^n \le \frac{1}{1+t^n} \le 1$

Donc : $\int_0^1 (1-t^n)dt \le I_n \le \int_0^1 dt$, ce qui donne : $1 - \frac{1}{n+1} \le I_n \le 1$

On en déduit par le théorème des gendarmes que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 1}$

• Avec !

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, on pose $\boxed{J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}}$

Cette intégrale généralisée converge car $\frac{1}{1+t^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^n}$

Pour $n \ge 2$ et $t \in [0,+\infty[$, on définit $f_n(t) = \frac{1}{1+t^n}$.

(i) Pour tout $n \ge 2$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$.

(ii) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1[\\ 1/2 & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t \in]1,+\infty[\end{cases}$ et f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

(iii) $\forall n \ge 2$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $0 \le f_n(t) \le \varphi(t)$,

où $\varphi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1[\\ 1/t^2 & \text{si } t \in [1,+\infty[\end{cases}$

et la fonction φ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Conclusion : d'après le théorème de convergence dominée,

$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt$, soit : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 1}$

• Questions :

1) Peut-on aussi appliquer le théorème de convergence dominée pour démontrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 1$? Réponse : oui, en vertu de l'adage « qui peut le plus peut le moins ».

2) Peut-on démontrer que $\lim_{n\to+\infty} J_n = 1$ sans utiliser le théorème de convergence dominée ? Réponse : c'est possible, mais il faut être astucieux (indication : écrire J_n comme somme de trois intégrales sur $[0,1]$, $[1,n]$ et $[n,+\infty[$ et majorer).