

Contraire, complémentaire, incompatible

Est-ce que *monter* est le contraire de *descendre* ? On peut penser que oui, mais cela dépend de la nature du sujet du verbe. Un être animé ne peut pas à la fois monter et descendre un escalier (incompatibilité des deux actions) et, s'il ne veut pas monter, il devra tôt ou tard descendre (complémentarité des deux actions). Par contre, l'escalier, qui est un objet inanimé, peut à la fois monter et descendre, ou du moins il autorise simultanément les deux actions. à ceux qui l'empruntent.

Certains termes n'ont qu'un seul contraire ; ainsi *vrai* est le contraire de *faux*, *vivant* est le contraire de *mort*, etc. Mais *blanc* est-il le contraire de *noir* ? Parfois oui (lorsqu'on joue aux échecs) ; en général non, puisqu'un objet qui n'est pas blanc peut être jaune, vert, rouge, bleu, etc.

Pour éclaircir un peu ce que signifie « être contraire à », il importe de remarquer que cette expression peut faire référence à deux relations distinctes : la relation de **complémentarité** et celle d'**incompatibilité**.

La relation de complémentarité est d'ordre quasi-logique. À partir d'un terme p , on fabrique son complémentaire en niant p : le terme complémentaire de p est $non-p$. Si je ne suis pas un nombre entier *pair*, cela revient à dire que je suis un nombre entier *impair* ; si je ne suis pas *mort*, c'est que je suis encore *vivant*.

La relation d'incompatibilité est moins contraignante : deux termes p et q sont incompatibles s'ils ne peuvent pas être vrais simultanément, c'est-à-dire si p implique $non-q$ ¹. L'eau de mon bain ne peut pas être à la fois *chaude* et *froide*. Mais elle ne peut pas non plus être à la fois *tiède* et *froide*, ou *brûlante* et *froide*.

Deux termes complémentaires sont nécessairement incompatibles. En effet, la relation de complémentarité est la relation d'incompatibilité complétée par l'affirmation que, si l'on applique ces deux termes à un sujet donné², l'un au moins est vrai ; il n'y a pas de troisième option. Inversement, des termes incompatibles mais non complémentaires peuvent être faux simultanément : si le prof n'est ni au premier étage, ni au deuxième étage, c'est peut-être qu'il est au troisième étage.

Il est possible de trouver un cadre commun aux relations de complémentarité et d'incompatibilité en considérant qu'elles s'appliquent à des termes qui sont placés sur une même échelle de variations. Par exemple l'échelle des sensations de chaleur dans un climat donné comporte les adjectifs suivants : *glacial* – *froid* – *confortable* – *chaud*

¹ Par contraposition, on a aussi $q \Rightarrow non-p$.

² Le sujet auquel on applique les termes peut être de nature très variable : un être animé, un objet inanimé, un concept abstrait, etc. Mais il est indispensable qu'il y ait une relation sémantique entre les termes et le sujet ; ainsi il n'y a aucun sens à se demander si un boulon est mort ou vivant.

– *torride*. Chacun des ces termes est incompatible avec les autres, mais aucun n'est complémentaire des autres. Par contre, lorsque l'échelle ne comporte que deux termes, l'incompatibilité équivaut à la complémentarité : *mobile* est complémentaire d'*immobile* sur une échelle simplifiée de mouvement.

Le choix de l'échelle est crucial. Appliqués à des touches de piano, *noir* et *blanc* sont complémentaires. Mais sur une échelle de luminosité, il y aura beaucoup plus de termes, par exemple : *noir* – *sombre* – *gris* – *clair* – *blanc*. Alors *noir* et *blanc* seront seulement incompatibles.

Bien, et les maths là-dedans ? On peut constater qu'un certain nombre d'erreurs de raisonnement viennent d'une confusion entre « complémentaire » et « incompatible ». Par exemple, il est incompatible pour une suite réelle d'être *strictement croissante* et *strictement décroissante*, mais ces deux termes ne sont pas complémentaires : une suite qui n'est pas strictement croissante est tout simplement ... *non strictement croissante*. Et une suite non strictement croissante peut être quand même croissante ; elle est donc loin d'être décroissante...

Comme on l'a dit plus haut, le choix du sujet auquel on applique les termes est déterminant. Pour une suite réelle, il est incompatible de converger et d'être non majorée ; pour une suite réelle croissante, il est complémentaire de converger et d'être non majorée.

Signalons pour finir que nous retrouvons les termes « incompatibles » et « complémentaires » en théorie des ensembles et en théorie des probabilités. En considérant deux parties A et B d'un ensemble Ω , qui peuvent aussi être deux événements d'un univers Ω :

- A et B sont deux événements incompatibles (ou deux parties disjointes) si $A \cap B = \emptyset$;

- A et B sont deux parties complémentaires (ou deux événements contraires) si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.