Peut-on se passer de la formule d'Augustin et Hermann ?

<u>Hypothèse</u> : soient $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n nombres réels. Démontrons l'inégalité : $\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n.\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

• Oui...

On note $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n.\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ ».

(i) Pour $n = 1$, $\mathscr{P}(1)$ s'écrit $(x_1)^2 \leq 1.x_1^2$, ce qui est vrai.

(ii) Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathscr{P}(n\text{-}1)$ soit vraie, c'est-à-dire que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^2 \leq (n-1).\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$$

Alors $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^2 + x_n^2 + 2x_n.\sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

$$\leq (n-1).\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 + 2.\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_n$$

Rappel : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $2ab \leq a^2 + b^2$. On en déduit que :

$$2.\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (n-1).x_n^2$$

D'où : $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq (n-1).\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (n-1).x_n^2 = n.\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Donc $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Conclusion : $\mathscr{P}(n)$ est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

• ... mais elle est bien pratique !

Dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on considère les deux vecteurs $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $v = (1, 1, \dots, 1)$.

Augustin et Hermann nous apprennent que $\left|(u|v)\right| \leq \|u\|.\|v\|$, ce qui équivaut à : $(u|v)^2 \leq \|u\|^2.\|v\|^2$

Or $$(u|v)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i \times 1)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2, \quad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\text{et} \quad \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n$$

D'où : $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n.\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Comme dit Hermann, « Es ist trivial ! ».