Programme de colle 10 : semaine 49 du 30/11 au 5/12

Chapitre 6. Systèmes linéaires

1. Systèmes linéaires : généralités

- **Qu'est-ce qu'un système linéaire ?** Soient n et p deux entiers non nuls. On appelle *système linéaire à n équations et p inconnues* $x_1,\ldots,x_p \in \mathbb{K}$ un ensemble d'équations de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_i & + & \ldots & + & a_{i,p}x_p & = & b_i \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

  Vocabulaire.

  ⋆ Le n-uplet $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ est le *second membre* de (S).

  ⋆ On appelle **système linéaire homogène** associé à (S) le système (S_0) obtenu en remplacaņt le second membre B par $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

  ⋆ On définit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la *matrice des coefficients* du système linéaire (S) ; la matrice augmentée est la matrice $A' \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ concaténée de A et B.

- **Qu'est-ce que résoudre un système linéaire ?** C'est trouver tous les p-uplets $(x_j)_{1\leq j\leq p}$ qui vérifient les n équations de (S).

- **Qu'elles sont les opérations permises sur un système ?** Ce sont les opérations sur **les lignes** suivantes :
  - échange $L_i \longleftrightarrow L_j$;
  - transvections $L_j \longleftarrow L_j + \lambda L_i$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$;
  - dilatations $L_i \longleftarrow \mu\, L_i$ avec $\mu \in \mathbb{K}^*$.

  On définit les mêmes opérations sur les matrices ; le passage matrice/système est compatible avec ses opérations. Deux systèmes (resp. matrices) sont équivalents (resp. équivalentes par lignes) s'il existe une suite d'opérations élémentaires permettant de passer de l'un à l'autre. Pour les matrices on note : $A \underset{L}{\sim} B$.

  Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

2. Méthode du pivot de Gauss

Remarque : des détails sur cette partie se trouvent dans la feuille de TD 6.

1. Définition d'une matrice *échelonnée* selon les lignes. Définition d'une matrice échelonnée réduite.
2. Méthode d'échelonnement d'une matrice : la méthode du pivot de Gauss.
   Théorème. *Toute matrice est équivalente par ligne à une unique matrice échelonnée réduite.* [1]
   Le **rang** d'une matrice c'est le nombre de lignes non nulles de l'unique échelonnée réduite à laquelle la matrice est équivalente par lignes.

1. L'unicité est admise ; l'existence résulte de la *Gaussian elimination*.

3. Résolution des systèmes linéaires

- **Comment résoudre un système linéaire échelonné ?** Étant donnés un système de rang r, définition des r inconnues principales (celles devant les pivots) et des $p-r$ inconnues secondaires. Pour résoudre un système échelonné compatible : les inconnues secondaires passent en paramètres et on résout le système de rang maximal en les r inconnues principales par « remontée ».
- **Comment résoudre un système linéaire ?** On l'échelonne.

Chapitre 7. Développements limités

Les fonctions étudiées sont définies dans un voisinage I de x_0, sauf éventuellement en x_0.

1. Qu'est-ce qu'un développement limité ?

1. Définition d'un **développement limité** d'une fontion f à l'ordre n en $x_0 \in I$ (*a.k.a.* $DL_n(x_0)$) : pour tout $x \in I$ (ou $x \in I \setminus \{x_0\}$),

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + ... + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x),$$

   avec $(a_k)_{0\le k\le n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

   Écriture en 0. $f(x_0+h) = a_0 + a_1h + ... + a_nh^n + h^n\varepsilon_0(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_0(h) = 0$.
2. La formule de **Taylor-Young** (*admise pour l'instant*) : si f est de classe $\mathscr{C}^n$ alors

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0}$$

3. **D.L. usuels en 0** : $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, exp, cos, sin, $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

2. Outils de comparaison locale

La fonction g ne s'annule pas au voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0).

1. Relation de négligeabilité $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\left(g(x)\right)$, lorsque $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Règles de calculs usuelles.
2. Relation d'équivalence $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, lorsque $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Règles de calculs usuelles.

   Lien : $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x) + o\left(g(x)\right)$.
3. Écriture (et calcul) d'un $DL_n(x_0)$ sous la forme :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + ... + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

   Dans ce cas, si a_p est le premier terme non nul, alors :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p.$$

3. Comment calculer des DL ?

Opérations sur les développements limités : substitutions « simples » ; combinaison linéaire ; produit ; primitivation ; composition (cas simples, au voisinage de 0) ; soit f ne s'annulant pas au voisinage d'un point x_0 : D.L. en x_0 de f^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$ (notamment $\alpha = -1$).

D.L. usuels en 0 : $x \mapsto \ln(1+x)$, arctan.