Exercice 27 de la feuille 17. On note $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui lui est canoniquement associé.

1. Justifier que f est une application bijective.
2. Montrer que $F = \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles, supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
   Préciser un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de F, et un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de G.
3. Exprimer (sans calculs) les vecteurs $f(\overrightarrow{u})$ et $f(\overrightarrow{v})$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ puis donner la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
4. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale (toutes deux carrées d'ordre deux) telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P, D et P^{-1}.
5. Expliciter D^n pour tout entier naturel n. Démontrer la relation $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$. En déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

Solution de l'exercice 27.

1. Nous avons rang A = rang $f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. – Dans $\mathcal{B}_0$ la matrice de $f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est $A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

   Soit $u = (x, y)$. $u \in F \iff \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \iff x - 3y = 0$. On reconnaît l'équation, dans le plan, d'une droite vectorielle dont un vecteur directeur est $\vec{u} = (3, 1)$.

   – Dans $\mathcal{B}_0$ la matrice de $f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est $A - I = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

   Soit $v = (x, y)$. $v \in G \iff \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \iff x - 2y = 0$. On reconnaît, là encore l'équation d'une droite vectorielle dont un vecteur directeur est $\vec{v} = (2, 1)$.

   – Montrons que F et G sont supplémentaires.
   $t \in F \cap G \iff \begin{cases} (f - 2\mathrm{id})(t) = 0 \\ (f - \mathrm{id})(t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(t) = 2t \\ f(t) = t \end{cases} \Longrightarrow t = 0$. Donc $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Or $\dim(F) + \dim(G) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Ceci achève de prouver que F et G sont supplémentaires.
3. $\vec{u} \in F$ donc $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$. $\vec{v} \in G$ donc $f(\vec{v}) = \vec{v}$. Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, et D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
   La **formule de changement de base** pour les endomorphismes se traduit, ici, par $D = P^{-1}AP$ ou encore $PDP^{-1} = A$ (on a multiplié l'égalité précédente à gauche par P et à droite par P^{-1}).
   $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
5. – Par récurrence, on prouve que pour $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   – $A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PD^{-1}) = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D...DP^{-1}$ et donc $A^n = PD^nP^{-1}$. Ainsi

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & 6 - 6.2^n \\ 2^n - 1 & 3 - 2.2^n \end{pmatrix}$$

Problème de révision.
Dans cet exercice, on note $\mathcal{B} = (e_l, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$.

A désigne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice A ; on note enfin Id_E l'application identité de E et O_E l'application nulle de E dans E

1. Déterminer le rang de f, son noyau et son image.
2. Déterminer le rang de $f - \mathrm{Id}_E$, montrer que le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient au noyau de $f - \mathrm{Id}_E$ et en déduire $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$.
3. Soient $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et w.
4. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est base de E.
5. Déterminer (sans autre calcul) la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. On notera D cette matrice.
6. (a) Déterminer P, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ et exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1}.
   (b) Donner explicitement la première colonne de A^n en fonction de n.
7. Vérifier que $f^3 = 2\,f^2 + f - 2\,\mathrm{Id}_E$.
8. En déduire 1'inversibilité de A et exprimer A^{-1} à l'aide de I_3, A et A^2.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$A^n = a_n\,I_3 + b_n\,A + c_n\,A^2.$$
   et que les mêmes valeurs satisfont à
$$D^n = a_n\,I_3 + b_n\,D + c_n\,D^2. \qquad (1)$$
10. Résoudre le système (1) et donner a_n, b_n, c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
11. Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n en fonction de I_3, A, A^2 et n. La formule demeure-t-elle pour $n = -1$?

Solution du problème de révision.

1. Echelonnons la matrice de f écrite dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   La matrice obtenue est échelonnée et de rang 3. Il en découle que f est de rang 3. Puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ et que $\ker(f) = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$, puisque un endomorphisme surjectif est bijectif[1].
2. La matrice de $f - \mathrm{Id}_E$ dans la base canonique est égale à $A - I_3$ donc est égale à :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. f est donc un automorphisme

Échelonnons la matrice :

$$\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\underset{C_1\leftrightarrow C_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\underset{C_3\leftarrow C_3+C_1}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\underset{C_3\leftarrow C_3+C_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

On en déduit immédiatement que le rang de la matrice est 2 donc le rang de $f-\mathrm{Id}_E$ est égal à 2. Il en découle que $\dim(\ker(f))=1$ par application du théorème du rang.

Par ailleurs

$$f(u)=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

D'où $f(u)=u$ ce qui est équivalent à $u\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Puisque $\dim(\ker(f))=1$, il en découle que $\ker(f-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}(\{u\})$.

3. On trouve :

$$f(v)=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}=-v$$

$$f(w)=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\\2\end{pmatrix}=2\,w.$$

4. Plusieurs solutions sont possibles. On utilise une solution de première période :

$$\det(u,v,w)=\begin{vmatrix}1&1&4\\1&-1&2\\1&1&1\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=6\neq 0.$$

La famille $\mathcal{C}=(u,v,w)$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

5. D'après les questions 2 et 3, on a $f(u)=u$; $f(v)=-v$ et $f(w)=2\,w$. Par conséquent la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est égale à :

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

6. (a) La matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{C}$ est égale à :

$$P=\begin{pmatrix}1&1&4\\1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

La formule de changement de base entraîne $D=P^{-1}\,A\,P$ soit [2]

$$A=P\,D\,P^{-1}.$$

On en déduit alors que $A^n=P\,D^n\,P^{-1}$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, en procédant par récurrence.

(b) Calculons [3] d'abord P^{-1}.

La formule de changement de base

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&4\\1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix},$$

2. multiplier à gauche par P et à droite par P^1 l'égalité $D=P^{-1}\,A\,P$

3. Il n'y pas lieu de justifier l'inversibilité de P ici. Mais si justification il y a, il suffit de dire que P est une matrice de passage d'une base vers une autre base

où $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ désigne les coordonnées dans la base canonique et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ celles dans la base $\mathcal{C}$ conduit au système linéaire d'inconnues (x', y', z') suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' + y' + 4\,z' & = & x \\ x' - y' + 2\,z' & = & y \\ x' + y' + z' & = & z \end{array} \right.$$

Ce système linéaire est équivalent au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3\,z' & = & x - z \\ -2\,y + z' & = & y - z \\ x' + y' + z' & = & z \end{array} \right.$$

qui admet pour unique solution

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + z \\ y' & = & \dfrac{x}{6} - \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} \\ z' & = & \dfrac{x}{3} - \dfrac{z}{3} \end{array} \right.$$

Soit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La première colonne de A^n est donc égale à $P \times D^n \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Soit :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^{n+2}}{3} \\ -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{6} + \frac{2^{n+1}}{3} \\ -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^n}{3} \end{pmatrix}.$$

7. On vérifie que les endomorphismes f^3 et $2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E$ coïncident en u ; v et w. Puisque $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il en découle que $f^3 = 2\,f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E$.
8. L'égalité des endomorphismes se traduit matriciellement :
$$A^3 = 2\,A^2 + A - 2\,I_3,$$
égalité qui s'écrit :
$$-\frac{1}{2}A^3 + A^2 + \frac{1}{2}\,A = I_3.$$
Mais alors $A \times \left(-\frac{1}{2}\,A^2 + A + \frac{1}{2}\,I_3\right) = I_3$. Ceci montre que A est inversible à droite donc inversible et
$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\,A^2 + A + \frac{1}{2}\,I_3.$$
9. On montre l'existence d'un triplet (a_n, b_n, c_n) par récurrence. Pour $n \in [\![0, 2]\!]$, c'est clairement vrai et le cas $n = 3$ découle de ce qui a été fait à la question précédente.
Supposons donc $n \geq 3$ et avoir établi que
$$A^n = a_n\,I_3 + b_n\,A + c_n\,A^2.$$

En multipliant par A (à gauche ou à droite), on trouve :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= a_n\,A + b_n\,A^2 + c_n\,A^3 \\ &= a_n\,A + b_n\,A^2 + c_n(2\,A^2 + A - 2\,I_3) \\ &= -2\,c_n\,I_3 + (a_n + c_n)\,A + (b_n + 2\,c_n)\,A^2 \end{aligned}$$

Ce qui montre l'existence d'un triplet de réels $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ tel que $A^{n+1} = a_{n+1}\,I_3 + b_{n+1}\,A + c_{n+1}\,A^2$.
Il en découle l'existence d'un triplet (a_n, b_n, c_n) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = a_n\,I_3 + b_n\,A + c_n\,A^2$.
Reste à établir l'unicité d'un tel triplet. Or celle-ci résulte du fait que la famille de matrices (I_3, A, A^2) est libre. En effet si $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ vérifie $\alpha\,I_3 + \beta\,A + \gamma\,A^2 = 0_3$, alors on en déduit que $\alpha\,I_3 + \beta\,D + \gamma\,D^2 = 0_3$, en multipliant [4] à gauche par P^{-1} et à droite par P. Mais alors cette égalité conduit à :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha - \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + 2\,\beta + 4\gamma &= 0 \end{cases},$$

système ô combien de Cramer [5] et qui a donc pour unique solution $(0, 0, 0)$.
Le fait qu'on a également $D^n = a_n\,I_3 + b_n\,A + c_n\,A^2$ résulte de la multiplication de l'égalité $A^n = a_n\,I_3 + b_n\,A + c_n\,A^2$ à gauche par P^{-1} et à droite par P.

10. Le triplet (a_n, b_n, c_n) est solution du système de Cramer suivant :

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n &= 1 \\ a_n - b_n + c_n &= (-1)^n \\ a_n + 2\,b_n + 4c_n &= 2^n \end{cases}.$$

que l'on résout aisément à l'aide des formules de Cramer appropriées ou d'un pivot de Gauss ou de la secourable commande `solve` de Maple si on a Maple a sa disposition [6]. On obtient :

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{3} - \frac{2^n}{3}\ ;\ b_n = \frac{1-(-1)^n}{2}\ ;\ c_n = -\frac{1}{2} + \frac{2^n}{3} + \frac{(-1)^n}{6}.$$

11. Pour ce qui concerne l'expression de A^n en fonction de I_3 ; A et A^2 ce n'est qu'affaire de substitution. On obtient la formule

$$A^n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{3} - \frac{2^n}{3}\right) I_3 + \frac{1-(-1)^n}{2}\,A + \left(-\frac{1}{2} + \frac{2^n}{3} + \frac{(-1)^n}{6}\right) A^2.$$

Pour ce qui est de l'expression de A^{-1} obtenue à la question 8, on vérifie que $a_{-1} = \frac{1}{2}$; $b_{-1} = 1$ et $c_{-1} = -\frac{1}{2}$. La formule [7] qu'on vient d'obtenir pour A^n avec $n \in \mathbb{N}$ est donc valable pour $n = -1$.

4. Rappel. $D = P^{-1}\,A\,P$.
5. En transposant la matrice du système, on retrouve la matrice de passage P à permutation près des lignes et puisque le rang de la transposée est égale au rang de la matrice ...
6. Ou une commande équivalente dans son logiciel de calcul formel maison.
7. En fait elle est aussi valable pour $n \in \mathbb{Z}$. On vérifie aisément que A^n s'écrit de manière unique sous la forme $A^n = a_n\,I_3 + b_n\,A + c_n\,A^2$ avec $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et que ceci est équivalent à $D^n = a_n\,I_3 + b_n\,D + c_n\,D^2$. Le système linéaire dont (a_n, b_n, c_n) est solution étant celui déja trouvé donc la solution trouvée est la bonne !