Exercice 24 de la feuille 10. Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $e^x = x^n$. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$.

1. Montrer que pour $n \geq 3$, l'équation considérée admet deux racines strictement positives. On note u_n la plus petite des deux. *On pourra étudier la fonction f_n.*
2. Montrer que $u_n \in]1, 3[$.
3. Montrer que $(u_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Montrer que $\lim u_n = 1$.
5. On pose $v_n = u_n - 1$. Etablir l'égalité suivante :
$$\frac{\ln(1+v_n)}{v_n} = \frac{1+v_n}{nv_n}.$$
6. En déduire l'équivalent $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$.

Solution de l'exercice 24. Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $e^x = x^n$. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$.

1. *Vu en cours.*
2. *Vu en cours.*
3. Fixons un entier $n \geq 3$. Comme u_{n+1} est solution de $e^x = x^n$ nous avons la relation :
$$e^{u_{n+1}} = {u_{n+1}}^{n+1}$$
Donc, comme $u_{n+1} \neq 0$,
$$e^{-u_{n+1}} u_{n+1}^n = \frac{1}{u_{n+1}}.$$
Évaluons $f_n(u_{n+1})$.
$$f_n(u_{n+1}) = 1 - {u_{n+1}}^n e^{-u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} > 0 = f_n(u_n)$$
Or u_n et u_{n+1} sont des éléments de $]1, 3[\subset]0, n[$ où f_n est strictement décroissante ; il vient donc : $u_{n+1} < u_n$. La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est strictement **décroissante**. Comme elle **minorée** par 1, elle est **convergente**.
4. Posons $\ell = \lim u_n$. Pour tout $n \geq 3$ nous avons $e^{u_n} = u_n^n$ et en passant au logarithme :
$$u_n = n \ln(u_n) \iff \frac{1}{n} = \frac{\ln(u_n)}{u_n} \quad (\star)$$
D'une part, $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ et d'autre part, comme $\ell \geq 1 > 0$, nous avons par continuité du ln et opérations usuelles sur les limites $\lim \dfrac{\ln(u_n)}{u_n} = \dfrac{\ln(\ell)}{\ell}$.
Ainsi $0 = \dfrac{\ln(\ell)}{\ell}$; donc $\boxed{\ell = 1}$.
5. Avec $(\star)$ nous trouvons $\dfrac{\ln(u_n)}{u_n} = \dfrac{\ln(1+v_n)}{1+v_n} = \dfrac{1}{n}$. Ainsi :
$$\frac{\ln(1+v_n)}{v_n} = \frac{\ln(1+v_n)}{1+v_n}\frac{1+v_n}{v_n} = \frac{1}{n}\frac{1+v_n}{v_n} = \frac{1+v_n}{nv_n}$$
6. Comme $\lim v_n = 0$, il vient par composition $\ln(1+v_n) \sim v_n$. Donc $\lim \dfrac{\ln(1+v_n)}{v_n}$. Ainsi :
$$\lim \frac{1+v_n}{nv_n} = 1$$
Donc $nv_n \sim 1 + v_n \sim 1$. En conclusion :
$$\boxed{u_n - 1 = v_n \sim \frac{1}{n}}$$

Exercice 6 de la feuille 10. Soit n un entier ≥ 2. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et pour tout entier $k \in \{0,..,n-1\}$ on note $\omega_k = \omega^k$ les racines n-ième de l'unité.
Les trois questions de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendantes.

1. (a) Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$
   (b) Montrer que $|\omega_k - 1|^2 = 2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{n})$.
   (c) En déduire la somme suivante : $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1|^2$.
2. (a) Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$
   (b) Calculer $|\omega_k - 1|$ en fonction de $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
   (c) En déduire la somme suivante : $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1|$.
3. (a) Calculer la somme : $W_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_{k+1} - \omega_k|$.
   (b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} W_n$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Solution de l'exercice 6.

1. (a) Calcul vu en cours.
   (b) On a $|\omega_k - 1|^2 = (\omega_k - 1)(\bar{\omega_k} - 1) = 2 - \omega_k - \bar{\omega_k} = 2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{n})$.
   (c) On a les égalités suivantes :
$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1|^2 \\ U_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{n})) \\ U_n &= \sum_{k=0}^{n-1} 2 - 2\sum_{k=0}^{n-1} (\cos(\frac{2k\pi}{n})) \\ U_n &= 2n \end{aligned}$$
2. (a) C'est encore un calcul classique.
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \end{aligned}$$
   D'autre part,
$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^k = \frac{\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{i\pi}{n}} - 1} = \frac{2}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}}$$
   Avec la méthode de l'angle moitié :
$$\frac{2}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}} = \frac{2}{e^{\frac{i\pi}{2n}}\left(e^{-\frac{i\pi}{2n}} - e^{\frac{i\pi}{2n}}\right)} = \frac{2}{2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{-\frac{i\pi}{2n}}$$

En écrivant $e^{-\frac{i\pi}{2n}} = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ on trouve alors

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$$

(b) Toujours avec la méthode de l'angle moitié on obtient :

$$|\omega_k - 1| = 2\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \text{ puisque } \frac{k\pi}{n} \in [0, \pi[.$$

(c) On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
V_n &= \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1| \\
V_n &= \sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} \\
V_n &= 2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.
\end{aligned}$$

3. (a) Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$|\omega_{k+1} - \omega_k| = |\omega_k||\omega_{k+1}\omega_k^{-1} - 1| = |\omega - 1| = 2\sin\frac{\pi}{n}.$$

On a donc :

$$\boxed{W_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_{k+1} - \omega_k| = 2n\sin\frac{\pi}{n}}$$

(b) On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} 2n\sin\frac{\pi}{n} = 2\pi}$$

On sait que les points d'affixe ω_k sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés. La somme W_n représente la somme des distances qui séparent deux sommets consécutifs du polygones. Lorsque n devient grand le polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O de rayon 1 ce rapproche du cercle en un certain sens : le calcul précédent montre que le périmètre du polygone se *rapproche* de celui du cercle.