Programme de colle 9 : semaine 48 du 23/11 au 27/11

Chapitre 5. Primitives et équations différentielles

Pour travailler efficacement ce chapitre : refaire et faire des calculs ! [1]

3. Équations différentielles d'ordre 2

1. Équations linéaires du second ordre, homogènes et à coefficients constants :
$$(E_0) \quad ay'' + by' + cy = 0, \quad (a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2.$$
   - Équation caractéristique associée : $aX^2 + bX + c = 0$. On note Δ son discriminant.
   - Ensemble des solutions de (E_0) à valeurs complexes.
   - Ensemble des solutions de (E_0) à valeurs réelles (si $a,b,c \in \mathbb{R}$) : « régimes apériodique ($\Delta > 0$), critique ($\Delta = 0$) et pseudo-périodique ($\Delta < 0$) ».
2. Équations linéaires du second ordre avec second membre :
$$(E) \quad ay'' + by' + cy = f(t), \quad (a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2.$$
   - Déterminantion d'une solution particulière lorsque : $f(t) = P(t)e^{\alpha t}$ avec $P(t) \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Principe de superposition des solutions.
   - Solution particulière dans le cas réel. Notamment lorsque $f(t)$ est de la forme $P(t)\cos(ut)+Q(t)\sin(vt)$.
   - Ensemble des solutions de (E) (solution part. + solutions de (E_0)).
   - Détermination d'une unique solution avec conditions initiales.

Chapitre 6. Systèmes linéaires

1. Systèmes linéaires : généralités

- **Qu'est-ce qu'un système linéaire ?** Soient n et p deux entiers non nuls. On appelle *système linéaire à n équations et p inconnues* $x_1,\dots,x_p \in \mathbb{K}$ un ensemble d'équations de la forme :
$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_i & + & \dots & + & a_{i,p}x_p & = & b_i \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

  Vocabulaire.

  ⋆ Le n-uplet $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ est le *second membre* de (S).

  ⋆ On appelle **système linéaire homogène** associé à (S) le système (S_0) obtenu en remplaçant le second membre B par $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

  ⋆ On définit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la *matrice des coefficients* du système linéaire (S) ; la matrice augmentée est la matrice $A' \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ concaténée de A et B.

1. Cette remarque s'applique à tous les chapitres.

- **Qu'est-ce que résoudre un système linéaire ?** C'est trouver tous les p-uplets $(x_j)_{1\leq j\leq p}$ qui vérifient les n équations de (S).
- **Qu'elles sont les opérations permises sur un système ?** Ce sont les opérations sur **les lignes** suivantes :
  - échange $L_i \longleftrightarrow L_j$;
  - transvections $L_j \longleftarrow L_j + \lambda L_i$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$;
  - dilatations $L_i \longleftarrow \mu\, L_i$ avec $\mu \in \mathbb{K}^*$.

  On définit les mêmes opérations sur les matrices ; le passage matrice/système est compatible avec ses opérations. Deux systèmes (resp. matrices) sont équivalents (resp. équivalentes par lignes) s'il existe une suite d'opérations élémentaires permettant de passer de l'un à l'autre. Pour les matrices on note : $A \underset{L}{\sim} B$.

  Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

2. Méthode du pivot de Gauss

Remarque : des détails sur cette partie se trouvent dans la feuille de TD 6.

1. Définition d'une matrice *échelonnée* selon les lignes. Définition d'une matrice échelonnée réduite.
2. Méthode d'échelonnement d'une matrice : la méthode du pivot de Gauss.

   Théorème. *Toute matrice est équivalente par ligne à une unique matrice échelonnée réduite.* [2]

   Le **rang** d'une matrice c'est le nombre de lignes non nulles de l'unique échelonnée réduite à laquelle la matrice est équivalente par lignes.

3. Résolution des systèmes linéaires

- **Comment résoudre un système linéaire échelonné ?** Étant donnés un système de rang r, définition des r inconnues principales (celles devant les pivots) et des $p - r$ inconnues secondaires. Pour résoudre un système échelonné compatible : les inconnues secondaires passent en paramètres et on résout le système de rang maximal en les r inconnues principales par « remontée ».
- **Comment résoudre un système linéaire ?** On l'échelonne.

2. L'unicité est admise ; l'existence résulte de la *Gaussian elimination.*