Programme de colle 8 : semaine 47 du 16/11 au 20/11

Chapitre 5. Primitives et équations différentielles

Pour travailler efficacement ce chapitre : refaire et faire des calculs ! [1]

1. Calcul intégral et calcul de primitives

1. **Primitive** : définition, primitives usuelles. Sur un **intervalle** I : deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Détermination d'une primitive dans ces cas simples types : $\frac{u'}{u}$, $u'\,u^{\alpha}$, $u'\,\exp(u)$ *etc.*
2. **Primitives et calcul intégral** : rappels. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction F définie pour tout $x \in I$ par :
$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \text{ avec } a \in I$$
est **la** primitive de f qui s'annule en a.
3. **Méthodes de calcul** :
   (a) l'intégration par partie ;
   (b) le changement de variable.

2. Équations différentielles d'ordre 1

1. Équation différentielle homogène $y' = a(t)y$ où $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
Détermination de l'ensemble des solutions.
2. Équation différentielle linéaire *résolue* en y' :
$$(E)\ y' = a(t)y + b(t) \text{ où } a,\ b : I \to \mathbb{R} \text{ sont continues}$$
   (a) Équation homogène associée (E_0) : $y' = a(t)y$.
   (b) Structure de l'ensemble des solutions de (E) : solution particulière + solutions de (E_0).
   (c) Détermination d'une solution particulière : méthode de **la variation de la constante**.
3. Résolution d'un *problème de Cauchy linéaire* :
$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) & \text{où } a,\ b : I \to \mathbb{R} \text{ sont continues ;} \\ y(t_0) = y_0 & (t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R} \end{cases}$$

3. Équations différentielles d'ordre 2

1. Équations linéaires du second ordre, homogènes et à coefficients constants :
$$(E_0)\ \ ay'' + by' + cy = 0, \quad (a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2.$$
   - Équation caractéristique associée : $aX^2 + bX + c = 0$. On note Δ son discriminant.
   - Ensemble des solutions de (E_0) à valeurs complexes.
   - Ensemble des solutions de (E_0) à valeurs réelles (si $a, b, c \in \mathbb{R}$) : « régimes apériodique ($\Delta > 0$), critique ($\Delta = 0$) et pseudo-périodique ($\Delta < 0$) ».

1. Cette remarque s'applique à tous les chapitres.

2. Équations linéaires du second ordre avec second membre :

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = f(t), \quad (a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2.$$

- Déterminantion d'une solution particulière lorsque : $f(t) = P(t)e^{\alpha t}$ avec $P(t) \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Principe de superposition des solutions.
- Solution particulière dans le cas réel. Notamment lorsque $f(t)$ est de la forme $P(t)\cos(ut) + Q(t)\sin(vt)$.
- Ensemble des solutions de (E) (solution part. + solutions de (E_0)).
- Détermination d'une unique solution avec conditions initiales.