Programme de colle 6 : semaine 45 du 2/11 au 6/11

Chapitre 3. Nombres complexes : généralités

⚠Toutes les formules de trigonométrie du formulaire du début d'année sont exigibles.

1. Le corps des nombres complexes

1. Les nombres complexes : manipulations sur la forme $a + ib$, partie réelle, partie imaginaire
2. Conjugaison complexe : définition et propriétés. Module. Relations $z\bar{z} = |z|^2$,
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}\cdot$$
3. Identification de $\mathbb{C}$ avec le plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct. Module et distance.
4. **L'inégalité triangulaire :** savoir démontrer.

2. Forme trigonométrique

1. Notation $\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$; **propriétés** de la notation exponentielle. Savoir démontrer.
$$\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2, e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad ; \quad \forall\theta \in \mathbb{R}, \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$
$$\forall(\theta,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$
2. Définition et propriétés d'un **argument** d'un nombre complexe. Lien avec les angles.
3. Forme trigonométrique d'un complexe non nul. **Identification de deux formes trigonométriques égales :** soient ρ, ρ' deux réels strictement positifs et θ, θ' deux réels. Alors :
$$\boxed{\rho\, e^{i\theta} = \rho'\, e^{i\theta'} \iff \begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta = \theta' + 2\,k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$
4. Savoir faire. Trouver le module et l'argument de $1 + e^{i\theta}$.

3. Équations algébriques

1. Équations du second degré.
   (a) Calcul des racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique.
   (b) Résolution d'une équation algébrique de degré 2 à coefficients complexes.
2. Équations $Z^n - a = 0$ avec $a \in \mathbb{C}$.
   (a) Résolution sous forme trigonométrique.

4. Transformation d'expressions trigonométriques

Linéarisation, factorisation et simplification d'expressions trigonométriques en passant en complexe et à l'aide de la notation exponentielle et des formules associées.

Chapitre 4. Fonctions usuelles d'une variable réelle

1. Autour de l'exponentielle réelle

1. La fonction ln : définition, propriété fondamentale à savoir démontrer :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

   Croissances comparées usuelles.
2. La fonction exp : définition, propriété fondamentale à savoir démontrer :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

   Croissances comparées usuelles.
3. **La notation puissance** :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R},\ a^b = \exp(b \ln a)}$$

   Régles de calcul, étudier d'une fonction de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.
4. **Les fonctions hyperboliques :** ch et sh. Définitions, études complètes.

2. Les fonctions circulaires

1. Les fonctions cos, sin et tan. Étude complète de la fonction tan. **Formules de trigonométrie usuelles**.
2. **Les fonctions circulaires réciproques** : arccos, arcsin et arctan. Définitions et études complètes : bien maîtriser les ensembles de définition et les ensembles image de ces fonctions. Calcul des dérivées.

Annexes

- L'exponentielle complexe : définition de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$.
- Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes : ce que l'on peut (et ne peut plus) faire.