Programme de colle 5 : semaine du 12/10 au 16/10

Chapitre 0. Pour bien démarrer

Prolégomènes D : récurrences et calculs algébriques.

- Rappels sur la récurrence. Principe de la récurrence *avec tous les prédécesseurs.*
- **Calcul de sommes et produits de familles indexées sur des parties de $\mathbb{N}$.** Manipulations des symboles $\sum$ et $\prod$; changements d'indices simples. Sommes classiques à connaître et à savoir démontrer :

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{C},\ \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n & \text{sinon} \end{cases}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

- Le nombre $n!$. Propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1).n!$.
- **Le coefficient binomial.**
  (a) Définition : soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
  (b) Propriétés à savoir démontrer : $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; **relation de Pascal** : pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$

$$\boxed{\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}}$$

  (c) **Formule du binôme de Newton.** Savoir démontrer.

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Chapitre 3. Nombres complexes : généralités

⚠Toutes les formules de trigonométrie du formulaire du début d'année sont exigibles.

1. Le corps des nombres complexes

1. Les nombres complexes : manipulations sur la forme $a+ib$, partie réelle, partie imaginaire
2. Conjugaison complexe : définition et propriétés. Module. Relations $z\bar{z} = |z|^2$,

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

3. Identification de $\mathbb{C}$ avec le plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct. Module et distance.
4. **L'inégalité triangulaire :** savoir démontrer.

2. Forme trigonométrique

1. Notation $\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$; **propriétés** de la notation exponentielle. Savoir démontrer.

$$\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2, e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad ; \quad \forall\theta \in \mathbb{R}, \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\forall(\theta,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

2. Définition et propriétés d'un **argument** d'un nombre complexe. Lien avec les angles.
3. Forme trigonométrique d'un complexe non nul. **Identification de deux formes trigonométriques égales :** soient ρ, ρ' deux réels strictement positifs et θ, θ' deux réels. Alors :

$$\boxed{\rho\, e^{i\theta} = \rho'\, e^{i\theta'} \iff \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho' \\ \theta = \theta' + 2\,k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.}$$

4. Savoir faire. Trouver le module et l'argument de $1 + e^{i\theta}$.

3. Équations algébriques

1. Équations du second degré.
   (a) Calcul des racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique.
   (b) Résolution d'une équation algébrique de degré 2 à coefficients complexes.
2. Équations $Z^n - a = 0$ avec $a \in \mathbb{C}$.
   (a) Résolution sous forme trigonométrique.

4. Transformation d'expressions trigonométriques

Linéarisation, factorisation et simplification d'expressions trigonométriques en passant en complexe et à l'aide de la notation exponentielle et des formules associées.