Programme de colle 4 : semaine du 5/10 au 9/10

Chapitre 2. Introduction au calcul différentiel

Nota Bene. Les fonctions d'une variable réelle considérées sont définies sur des intervalles ou réunion d'intervalles non vides, non réduits à un point. Elles sont à valeurs réelles.

1. Dérivation des fonctions d'une variable réelle

1. Taux d'accroissement, nombre dérivée et équation de la tangente en un point.
2. La fonction dérivée. Dérivées d'ordres supérieurs. Dérivées de fonctions usuelles.

2. Calculs de dérivées

Nota Bene. Les démonstrations des théorèmes suivants ne sont pas encore au programme.

1. Rappel sur la somme, le produit et le quotient.
2. **Dérivée d'une fonction composée**.

   Soient $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que :

   $$\begin{cases} \bullet \quad u \text{ est dérivable sur } I\,; \\ \bullet \quad v \text{ est dérivable sur } J\,; \\ \bullet \quad \forall x \in I,\ u(x) \in J\ . \end{cases}$$

   Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et :

   $$\boxed{\forall x \in I,\ (v \circ u)'(x) = u'(x).v'(u(x))}$$

3. **Dérivée d'une fonction réciproque**.

   Soient $u : I \to J$ une application **bijective** telles que :

   $$\begin{cases} \bullet \quad u \text{ est dérivable sur } I\,; \\ \bullet \quad \forall x \in I,\ u'(x) \neq 0\ . \end{cases}$$

   Alors **la réciproque** u^{-1} est dérivable sur J et :

   $$\boxed{\forall x \in J,\ (u^{-1})'(x) = \frac{1}{u'\left(u^{-1}(x)\right)}}$$

3. Étude d'une fonction

Plan d'étude d'une fonction d'une variable réelle :

1. Domaine de définition et restriction du domaine pour l'étude par symétrie.
2. Dérivabilité et calcul de la dérivée. Étude du signe, des zéros de la dérivée puis tableau de variation(s).
3. Étude asymptotique : asymptotes horizontales, verticales et obliques (*pas encore de méthode générale pour leur détermination*).
4. Tracé de l'allure de la courbe représentative.

Utilisation du calcul différentiel : pour déterminer des extrema, des variations, des signes, résoudre des équations ou inéquations...

Chapitre 0. Pour bien démarrer

Prolégomènes D : récurrences et calculs algébriques.

- Rappels sur la récurrence. Principe de la récurrence *avec tous les prédécesseurs.*
- **Calcul de sommes et produits de familles indexées sur des parties de $\mathbb{N}$.** Manipulations des symboles $\sum$ et $\prod$; changements d'indices simples. Sommes classiques à connaître et à savoir démontrer :

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{C},\ \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n & \text{sinon} \end{cases}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

- Le nombre $n!$. Propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1).n!$.
- **Le coefficient binomial.**

  (a) Définition : soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

  (b) Propriétés à savoir démontrer : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; **relation de Pascal** : pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$

$$\boxed{\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}}$$

  (c) **Formule du binôme de Newton.** Savoir démontrer.

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$