Programme de colle 30 : semaine 25 du 20/06 au 24/06

Chapitre 21. Séries numériques

⚠Revoir le chapitre 10 sur les suites.

1. Vocabulaire général

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). La « série de terme général u_n », notée $\sum u_n$ ou $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *sommes partielles* définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Convergence ou divergence d'une série. La *somme d'une série convergente* est notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: c'est la limite des sommes partielles.

Si $\sum u_n$ converge alors $\lim u_n = 0$. Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est dite « grossièrement divergente ».

Exemples : à savoir retrouver !

- **Séries téléscopiques.**
- **Séries géométriques.** Soit $x \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ est convergente si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

- **Série harmonique.** La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.
- **Séries exponentielles.** Soit $x \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$.

2. Opérations sur les séries convergentes

Somme de séries convergentes ; produit par un scalaire.

3. Séries à termes positifs

Comparaison de séries à termes positifs. Équivalent. Comparaison série-intégrale : à savoir retrouver par la méthode des rectangles .

- **Séries de Riemann :**

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1}$$

4. Séries absolument convergentes

Définition. Une série $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème. Si une série est absolument convergente alors elle est convergente.

Chapitre 22. Polynômes en une indéterminée

⚠Revoir le chapitre 3 sur les nombre complexes : résolution d'équations algébriques ; racines de l'unité.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

1. Égalité de deux polynômes. Addition et multiplication.
2. Degré d'un polynôme. Degré d'une somme et d'un produit.
3. Dérivation des polynômes.
   (a) Linéarité de la dérivation. Dérivation d'un produit.
   (b) Dérivées successives (notées $P^{(m)}$ avec $m \in \mathbb{N}$) ; **dérivées successives d'un monôme X^n.** La formule de Leibniz : pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$,

$$(PQ)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} P^{(k)} Q^{(m-k)}$$

   La formule de Taylor : si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ alors :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k$$

2.Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$

1. Division euclidienne ; pratique de la division euclidienne.
2. Relation de divisibilité.

3. Racines d'un polynôme

1. Fonction polynomiale. Définiton d'une racine d'un polynôme.
2. **Lien avec la divisibilité :** $\boxed{\alpha \textbf{ est racine de } P \textbf{ ssi } (X-\alpha) \textbf{ divise } P\textbf{.}}$
3. Un polynôme de degré n admet au plus n racines. Un polynôme qui admet une infinité de racines est nul.
4. Racines multiples. **Ordre de multiplicité d'une racine : définition**. **Caractérisation à l'aide des dérivées successives de P**.
5. Relation entre coefficients et racines : degrés 2 et 3 ; somme et produit des racines d'un polynôme de degré n.

4. Décomposition en produit de facteurs irréductibles

1. Définition d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$; existence et unicité de la factorisation en produit de facteurs irréductibles (théorème admis).
2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$.
   (a) Théorème de d'Alembert-Gauss (tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet au moins une racine) ; **les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré** 1.
   (b) Décomposition d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles ; **exemple fondamental de $X^n - 1$ avec les racines n-ièmes de l'unité**.
3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$.
   (a) **Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$: degré** 1 **ou degré** 2 **avec discriminant** < 0**.**
   (b) Pratique de la décomposition d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles.