

Programme de colle 2 : semaine 39 du 21/09 au 25/09

Chapitre 0. Pour bien démarrer

- **Prolégomènes A** : quelques consignes pour bien lire et écrire des mathématiques ; quelques méthodes de démonstration (par implications, par l'absurde, par analyse-synthèse, par équivalences) ; du bon usage des quantificateurs.
- **Prolégomènes B** : inégalités et inéquations dans l'ensemble des nombres réels ; utilisation de la valeur absolue et inégalité triangulaire ; les intervalles.
- **Prolégomènes C** : rappels de trigonométrie ; formules d'addition et de duplication ; transformation d'expressions trigonométriques ; équations et inéquations trigonométriques.

Chapitre 1. Vocabulaire sur les fonctions

1. Vocabulaire de base sur les applications ; composition, restriction, prolongement.
2. Définition d'une application **bijective**. Caractérisation en terme d'équation. Application bijective et **ré-ciproque**.
3. **Cas d'une fonction d'une variable réelle.**
 - (a) Vocabulaire général : application majorée, minorée, bornée, périodique, paire, impaire.
 - (b) Courbe représentative : axes ou centres de symétrie ; caractérisation analytique de ces propriétés.
 - (c) Asymptotes obliques ; asymptotes verticales.
 - (d) **Théorème de la bijection**. Graphe de la réciproque.

Questions de cours : trigonométrie.

Les formules vues dans la fiche **Prolégomènes C**.

Exercices à rédiger, consignes.

Pour votre première interrogation orale, vous préparez trois exercices de la liste ci-dessous, un dans chaque catégorie. Vous présentez au tableau l'un de ces exercices, même s'il n'est pas complet, même s'il n'est pas parfaitement rédigé : l'objectif est d'apprendre et de progresser.

Catégorie A. Inéquations

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$\frac{|x|}{x^2 - 1} \geq 1.$$

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$x + |1 - x^2| \geq 1.$$

Catégorie B. Fonctions numériques ; théorème de la bijection

Exercice 3. Soit la fonction d'une variable réelle $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$.

- Déterminer le domaine de définition I de f et étudier sa parité.
- Réaliser l'étude complète de la fonction f . Préciser les asymptotes à la courbe représentative de f .
- Montrer que f induit une bijection de I vers un intervalle J à préciser puis déterminer une expression pour sa réciproque.

Exercice 4. Soit la fonction d'une variable réelle $g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.

- Déterminer le domaine de définition de g et étudier sa parité.
- Étudier g sur $[0, +\infty[$ et en déduire son tableau de variation sur \mathbb{R} . Préciser les asymptotes à la courbe représentative de g .
- Montrer que g induit une bijection de \mathbb{R} vers un intervalle J à préciser puis déterminer une expression pour sa réciproque.

Catégorie C. Inégalités et études de fonctions

Exercice 5. Justifier à l'aide d'une étude de fonction que pour tout $x \leq 1$ nous avons l'inégalité :

$$x + \sqrt{2}\sqrt{1-x} \leq \frac{3}{2}.$$

Exercice 6. On se propose de démontrer l'affirmation ci-dessous :

$$\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

- Réaliser l'étude **complète** de la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$: domaine de définition et domaine d'étude, tableau de variations, asymptotes.
- En déduire l'assertion suivante :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

- Soit a, b et c trois réels strictement positifs. On pose $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

(a) On suppose que $c = \max(a, b, c)$. Justifier que $S \geq 3$; on peut remarquer que :

$$S = \frac{a}{b} + \boxed{\frac{b}{a}} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \boxed{\frac{b}{a}},$$

(b) Justifier que $S \geq 3$ dans tous les cas.
