Programme de colle 29 : semaine 24 du 13/06 au 17/06

Chapitre 20. Variables aléatoires sur un univers fini

⚠Revoir le chapitre 16 sur les probabilités sur un univers fini.

Contexte : Ω est un univers fini et P une mesure de probabilité sur Ω.

1. Vocabulaire général

1. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E ? C'est une application $X : \Omega \to E$. Notations usuelles pour les évènements « $X = x$ », « $X \in A$ ».
2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire : définition. Lorsque $E = \{x_1, ..., x_n\}$ la loi est déterminée par les nombres $p_i = P(X = x_i)$.

2. Couples de variables aléatoires

1. Loi conjointe de deux variables aléatoires X et Y : c'est la loi du couple (X, Y) ; présentation sous forme d'un tableau.
2. Lois marginales.
3. Variables aléatoires indépendantes ; des variables aléatoires $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ sont *mutuellement indépendantes* lorsque pour tout famille $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ les évènements $(X_k = x_k)$ avec $1 \leq k \leq n$ sont *mutuellement indépendants*. En particulier nous avons :

$$P(X_1 = x_1 \text{ et } X_2 = x_2 \cdots \text{ et } X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)\cdots P(X_n = x_n).$$

3. Paramètres associés à une variable aléatoires réelle

1. Paramètre de position : l'espérance. $E(X) = \displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.
   (a) Formule de transfert :
   pour $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ et f une fonction numérique on a $E(f(X)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)P(X = x_k)$, en particulier :
   $$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)}$$
   (b) Propriétés : linéarité et croissance. Espérance d'une variable aléatoire constante.
   (c) Si X et Y sont **indépendantes** alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
2. Paramètre de dispertion : la variance. $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$.
   (a) $\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$.
   (b) Propriété : $V(aX + b) = a^2V(X)$.

4. Lois usuelles

Loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.

Chapitre 21. Séries numériques

⚠Revoir le chapitre 10 sur les suites.

1. Vocabulaire général

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). La « série de terme général u_n », notée $\sum u_n$ ou $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *sommes partielles* définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Convergence ou divergence d'une série. La *somme d'une série convergente* est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: c'est la limite des sommes partielles.

Si $\sum u_n$ converge alors $\lim u_n = 0$. Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est dite « grossièrement divergente ».

Exemples : à savoir retrouver !

- **Séries téléscopiques.**
- **Séries géométriques.** Soit $x \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ est convergente si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

- **Série harmonique.** La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.
- **Séries exponentielles.** Soit $x \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$.

2. Opérations sur les séries convergentes

Somme de séries convergentes ; produit par un scalaire.

3. Séries à termes positifs

Comparaison de séries à termes positifs. Équivalent. Comparaison série-intégrale : à savoir retrouver par la méthode des rectangles .

- **Séries de Riemann :**

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1}$$

4. Séries absolument convergentes

Définition. Une série $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème. Si une série est absolument convergente alors elle est convergente.