Programme de colle 28 : semaine 23 du 6/06 au 10/06

Chapitre 19. Intégration sur un segment

⚠Revoir le chapitre 5 sur les méthodes de calcul d'intégrales et primitives (IPP, changement de variable).

1. Généralités sur l'intégrale

1. Construction de l'intégrale sur un segment I (*aucune connaissance n'est exigible*) :
   (a) définition d'une fonction en escalier ; intégrale d'une fonction en escalier.
   (b) Si f est continue alors :

$$\sup\left\{\int_I \varphi,\quad \text{tel que } \varphi \leq f \text{ et } \varphi \text{ en escalier}\right\} = \inf\left\{\int_I \psi,\quad \text{tel que } f \leq \psi \text{ et } \psi \text{ en escalier}\right\}$$

   Ce nombre est $\displaystyle\int_I f$. **Interprétation en terme d'aire sous la courbe**.

2. Propriétés de l'intégrale :
   (a) Linéarité. Relation de Chasles.
   (b) Ordre $f \geq g \Rightarrow \displaystyle\int_I f \geq \int_I g$; l'inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

$$\text{Inégalité : } \left|\int_{[a,b]} f\right| \leq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

   (c) Si f est une fonction <u>positive</u> et <u>continue</u> telle que $\displaystyle\int_I f = 0$ alors $f = 0$.

2. Calcul différentiel et intégral

1. Définition d'une primitive ; primitives usuelles.
2. **Théorème fondamental** : soit f continue sur I et $a \in I$, alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a. ([**Démonstration exigible**])
3. **Méthodes de calcul d'intégrales et primitives : IPP ; le changement de variable.**

3. Utilisations de l'intégrale

1. **Définition des sommes (ici à gauche) de Riemann** $R_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$ (associées à une subdivision régulière du segment $I = [a,b]$).
   Théorème : Si f est continue sur I alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_I f$. Démonstration dans le cas de classe $\mathcal{C}^1$.
2. **Formule de Taylor** avec reste intégral ([**Démonstration exigible**]). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Nous avons

$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}\,t}$$

Chapitre 20. Variables aléatoires sur un univers fini

⚠Revoir le chapitre 16 sur les probabilités sur un univers fini.

Contexte : Ω est un univers fini et P une mesure de probabilité sur Ω.

1. Vocabulaire général

1. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E ? C'est une application $X : \Omega \to E$. Notations usuelles pour les évènements « $X = x$ », « $X \in A$ ».
2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire : définition. Lorsque $E = \{x_1, ..., x_n\}$ la loi est déterminée par les nombres $p_i = P(X = x_i)$.

2. Couples de variables aléatoires

1. Loi conjointe de deux variables aléatoires X et Y : c'est la loi du couple (X, Y) ; présentation sous forme d'un tableau.
2. Lois marginales.
3. Variables aléatoires indépendantes ; des variables aléatoires $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ sont *mutuellement indépendantes* lorsque pour tout famille $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ les évènements $(X_k = x_k)$ avec $1 \leq k \leq n$ sont *mutuellement indépendants*. En particulier nous avons :

$$P(X_1 = x_1 \text{ et } X_2 = x_2 \cdots \text{ et } X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)\cdots P(X_n = x_n).$$

3. Paramètres associés à une variable aléatoires réelle

1. Paramètre de position : l'espérance. $E(X) = \displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.
   (a) Formule de transfert :
   pour $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ et f une fonction numérique on a $E(f(X)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)P(X = x_k)$,
   en particulier :
   $$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)}$$
   (b) Propriétés : linéarité et croissance. Espérance d'une variable aléatoire constante.
   (c) Si X et Y sont **indépendantes** alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
2. Paramètre de dispertion : la variance. $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$.
   (a) $\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$.
   (b) Propriété : $V(aX + b) = a^2V(X)$.

4. Lois usuelles

Loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.