Programme de colle 27 : semaine 22 du 30/05 au 3/06

Chapitre 18. Applications linéaires

1. Matrice d'une application linéaire

1. Application linéaire $X \mapsto AX$ canoniquement associée à une matrice A. Notations $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.
2. Définition de la matrice $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ de $f \in \mathscr{L}(E,F)$ d'une base $\mathcal{B}_E$ de E vers une base $\mathcal{B}_E$ de F.
   Notation : $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E}(f) := \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(f)$ pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$.
3. Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; **interprétation du produit** (composition d'applications linéaires). Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$:
   $$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g).\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$$
4. Caractérisations de l'inversibilité d'une matrice.
   Soit f un endomorphisme de E de dimension n et $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ une matrice associée alors :
   $$\boxed{\begin{array}{lcc} A \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & \operatorname{rg} A = n \\ & \Leftrightarrow & \operatorname{Ker} f = \{0_E\} \\ & \Leftrightarrow & \operatorname{Im} f = E \\ & \Leftrightarrow & f \text{ est un isomorphisme} \end{array}}$$
   Dans ce cas $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = A^{-1}$.

2. Changements de base

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E.

1. Matrice de passage : définition. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ qui exprime les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ ainsi :
   $$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E).$$
   Propriété : une matrice de passage est inversible et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1}$.
2. Formules de changement de base. Posons $P := P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.
   (a) **Pour un vecteur** ; soit $u \in E$ de vecteur coordonnées $X_{\mathcal{B}}$ (resp. $X_{\mathcal{B}'}$) dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). Alors
   $$\boxed{X_{\mathcal{B}'} = P^{-1} X_{\mathcal{B}}}$$
   (b) **pour un endomorphisme** ; soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors
   $$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) P}$$
   (c) **pour une applicaton linéaire** ; soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors en posant $P := P_{\mathcal{B}_E\to\mathcal{B}'_E}$ et $Q := P_{\mathcal{B}_F\to\mathcal{B}'_F}$
   $$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f) = Q^{-1} \operatorname{mat}_{B_E,\mathcal{B}_F}(f) P}$$

Annexe. Projecteurs et symétries

1. Définition d'un **projecteur** d'un espace vectoriel. Propriétés. Un endomorphisme f est un projecteur si et seulement si $f \circ f = f$.
2. Définition d'une **symétrie** d'un espace vectoriel. Propriétés. Un endomorphisme f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \mathrm{Id}$.

Chapitre 19. Intégration sur un segment

⚠Revoir le chapitre 5 sur les méthodes de calcul d'intégrales et primitives (IPP, changement de variable).

1. Généralités sur l'intégrale

1. Construction de l'intégrale sur un segment I (*aucune connaissance n'est exigible*) :
   (a) définition d'une fonction en escalier ; intégrale d'une fonction en escalier.
   (b) Si f est continue alors :
   $$\sup\left\{\int_I \varphi,\quad \text{tel que } \varphi \le f \text{ et } \varphi \text{ en escalier}\right\} = \inf\left\{\int_I \psi,\quad \text{tel que } f \le \psi \text{ et } \psi \text{ en escalier}\right\}$$
   Ce nombre est $\displaystyle\int_I f$. **Interprétation en terme d'aire sous la courbe**.
2. Propriétés de l'intégrale :
   (a) Linéarité. Relation de Chasles.
   (b) Ordre $f \ge g \Rightarrow \displaystyle\int_I f \ge \int_I g$; l'inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_I f\right| \le \int_I |f|$.
   $$\text{Inégalité : } \left|\int_{[a,b]} f\right| \le (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$
   (c) Si f est une fonction positive et continue telle que $\displaystyle\int_I f = 0$ alors $f = 0$.

2. Calcul différentiel et intégral

1. Définition d'une primitive ; primitives usuelles.
2. **Théorème fondamental** : soit f continue sur I et $a \in I$, alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a. ([**Démonstration exigible**])
3. **Méthodes de calcul d'intégrales et primitives : IPP ; le changement de variable.**

3. Utilisations de l'intégrale

1. **Définition des sommes (ici à gauche) de Riemann** $R_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$ (associées à une subdivision régulière du segment $I = [a,b]$).
   Théorème : Si f est continue sur I alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_I f$. Démonstration dans le cas de classe $\mathcal{C}^1$.
2. **Formule de Taylor** avec reste intégral ([**Démonstration exigible**]). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Nous avons
   $$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}\,t}$$