

Programme de colle 26 : semaine 21 du 23/05 au 27/05

Chapitre 18. Applications linéaires

1. Matrice d'une application linéaire

1. Application linéaire $X \mapsto AX$ canoniquement associée à une matrice A . Notations $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$.
2. Définition de la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ d'une base \mathcal{B}_E de E vers une base \mathcal{B}_F de F .
Notation : $\text{mat}_{\mathcal{B}_E}(f) := \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(f)$ pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.
3. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; **interprétation du produit** (composition d'applications linéaires). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$:

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$$

4. Caractérisations de l'inversibilité d'une matrice.

Soit f un endomorphisme de E de dimension n et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ une matrice associée alors :

$$\begin{array}{lcl} A \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & \text{rg } A = n \\ & \Leftrightarrow & \text{Ker } f = \{0_E\} \\ & \Leftrightarrow & \text{Im } f = E \\ & \Leftrightarrow & f \text{ est un isomorphisme} \end{array}$$

Dans ce cas $\text{mat}_{\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = A^{-1}$.

2. Changements de base

Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases d'un espace vectoriel E .

1. Matrice de passage : définition. La matrice de passage de la base \mathcal{B} à \mathcal{B}' est la matrice $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ qui exprime les vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} ainsi :

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E).$$

Propriété : une matrice de passage est inversible et $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1}$.

2. Formules de changement de base. Posons $P := P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

- (a) **Pour un vecteur** ; soit $u \in E$ de vecteur coordonnées $X_{\mathcal{B}}$ (resp. $X_{\mathcal{B}'}$) dans la base \mathcal{B} (resp. \mathcal{B}').
Alors

$$X_{\mathcal{B}'} = P^{-1} X_{\mathcal{B}}$$

- (b) **pour un endomorphisme** ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) P$$

- (c) **pour une applicaton linéaire** ; soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors en posant $P := P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E}$ et $Q := P_{\mathcal{B}'_F \rightarrow \mathcal{B}_F}$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f) = Q^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) P$$

Chapitre 19. Intégration sur un segment

△ Revoir le chapitre 5 sur les méthodes de calcul d'intégrales et primitives (IPP, changement de variable).

1. Généralités sur l'intégrale

1. Construction de l'intégrale sur un segment I (*aucune connaissance n'est exigible*) :

(a) définition d'une fonction en escalier ; intégrale d'une fonction en escalier.

(b) Si f est continue alors :

$$\sup \left\{ \int_I \varphi, \text{ tel que } \varphi \leq f \text{ et } \varphi \text{ en escalier} \right\} = \inf \left\{ \int_I \psi, \text{ tel que } f \leq \psi \text{ et } \psi \text{ en escalier} \right\}$$

Ce nombre est $\int_I f$. **Interprétation en terme d'aire sous la courbe.**

2. Propriétés de l'intégrale :

(a) Linéarité. Relation de Chasles.

(b) Ordre $f \geq g \Rightarrow \int_I f \geq \int_I g$; l'inégalité triangulaire : $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$.

$$\text{Inégalité : } \left| \int_{[a,b]} f \right| \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

(c) Si f est une fonction positive et continue telle que $\int_I f = 0$ alors $f = 0$.

2. Calcul différentiel et intégral

1. Définition d'une primitive ; primitives usuelles.

2. **Théorème fondamental** : soit f continue sur I et $a \in I$, alors $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a . ([**Démonstration exigible**])

3. **Méthodes de calcul d'intégrales et primitives : IPP ; le changement de variable.**