Programme de colle 25 : semaine 19 du 9/05 au 13/05

Chapitre 17. Applications linéaires

⚠Revoir les chapitres 6 & 12 sur les systèmes linéaires et le calcul matriciel (calcul du rang, de l'inverse).

⚠Revoir le chapitre 14 sur les espaces vectoriels en dimension finie.

1. Généralités

1. Définition : soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ (désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une application $f : E \to F$ est dites **linéaire** lorsque :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

   Exemples usuels (de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$, dérivation, intégrale...).
2. Propriétés (image du vecteur nul, combinaisons linéaires et compositions d'applications linéaires).
3. Noyau et image d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
   Les propriétés ci-dessous sont à savoir démontrer.
   (a) **Noyau.** $\operatorname{Ker} f$: définition ; $\operatorname{Ker} f$ **est un ss-ev de** E**.** f **injective ssi** $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$**.**
   (b) **Image.** $\operatorname{Im} f$: définition ; $\operatorname{Im} f$ **est un ss-ev de** F**.** f **surjective ssi** $\operatorname{Im} f = F$**.**

2. Ensembles d'applications linéaires

1. L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ des applications linéaires de E vers F : $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.
2. Composistion d'applications linéaires. Calculs dans l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E ; puissances d'endomorphismes.
3. Réciproque d'un isomorphisme. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$: définition.

3. Applications linéaires en dimension finie

Dans ce paragraphe E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. **Image d'une base**. Une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est uniquement déterminée par l'image d'une base $\mathcal{B}$ de E ; propriétés :
   - $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{B}))$; f est surjective $\Leftrightarrow$ $f(\mathcal{B})$ est génératrice ;
   - f est injective $\Leftrightarrow$ $f(\mathcal{B})$ est libre ;
   - f est bijective $\Leftrightarrow$ $f(\mathcal{B})$ est une base.
2. Classification des espaces de dimension finie : $\dim E = n$ ssi E et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes (étant donnée une base de E, contruction de l'isomorphisme). Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels sont isomorphes ssi ils ont la même dimension.
3. **Rang d'une application linéaire**. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Définition :

$$\boxed{\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f}$$

   Formule du rang :

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rang} f = \dim E}$$

4. En dimension finie, un **endomorphisme** est *bijectif* ssi il est *injectif* ssi il est *surjectif*. **À savoir montrer**.

Chapitre 18. Applications linéaires

1. Matrice d'une application linéaire

1. Application linéaire $X \mapsto AX$ canoniquement associée à une matrice A. Notations $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.
2. Définition de la matrice $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ de $f \in \mathscr{L}(E,F)$ d'une base $\mathcal{B}_E$ de E vers une base $\mathcal{B}_E$ de F.
   Notation : $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E}(f) := \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(f)$ pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$.
3. Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; **interprétation du produit** (composition d'applications linéaires). Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$:
   $$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g).\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$$
4. Caractérisations de l'inversibilité d'une matrice.
   Soit f un endomorphisme de E de dimension n et $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ une matrice associée alors :
   $$\boxed{\begin{array}{lcc} A \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & \operatorname{rg} A = n \\ & \Leftrightarrow & \operatorname{Ker} f = \{0_E\} \\ & \Leftrightarrow & \operatorname{Im} f = E \\ & \Leftrightarrow & f \text{ est un isomorphisme} \end{array}}$$
   Dans ce cas $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = A^{-1}$.

2. Changements de base

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E.

1. Matrice de passage : définition. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ qui exprime les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ ainsi :
   $$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\operatorname{id}_E).$$
   Propriété : une matrice de passage est inversible et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1}$.
2. Formules de changement de base. Posons $P := P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.
   (a) **Pour un vecteur** ; soit $u \in E$ de vecteur coordonnées $X_{\mathcal{B}}$ (resp. $X_{\mathcal{B}'}$) dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). Alors
   $$\boxed{X_{\mathcal{B}'} = P^{-1} X_{\mathcal{B}}}$$
   (b) **pour un endomorphisme** ; soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors
   $$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) P}$$
   (c) **pour une applicaton linéaire** ; soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors en posant $P := P_{\mathcal{B}_E\to\mathcal{B}'_E}$ et $Q := P_{\mathcal{B}_F\to\mathcal{B}'_F}$
   $$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f) = Q^{-1} \operatorname{mat}_{B_E,\mathcal{B}_F}(f) P}$$