Programme de colle 24 : semaine 18 du 2/05 au 4/05

Chapitre 17. Applications linéaires

⚠Revoir les chapitres 6 & 12 sur les systèmes linéaires et le calcul matriciel (calcul du rang, de l'inverse).

⚠Revoir le chapitre 14 sur les espaces vectoriels en dimension finie.

1. Généralités

1. Définition : soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ (désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une application $f : E \to F$ est dites **linéaire** lorsque :
$$\forall (u,v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$
Exemples usuels (de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$, dérivation, intégrale...).
2. Propriétés (image du vecteur nul, combinaisons linéaires et compositions d'applications linéaires).
3. Noyau et image d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Les propriétés ci-dessous sont à savoir démontrer.
   (a) **Noyau.** $\operatorname{Ker} f$: définition ; $\operatorname{Ker} f$ **est un ss-ev de** E**.** f **injective ssi** $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$**.**
   (b) **Image.** $\operatorname{Im} f$: définition ; $\operatorname{Im} f$ **est un ss-ev de** F**.** f **surjective ssi** $\operatorname{Im} f = F$**.**

2. Ensembles d'applications linéaires

1. L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E vers F : $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.
2. Composistion d'applications linéaires. Calculs dans l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E ; puissances d'endomorphismes.
3. Réciproque d'un isomorphisme. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$: définition.

3. Applications linéaires en dimension finie

Dans ce paragraphe E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. **Image d'une base**. Une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est uniquement déterminée par l'image d'une base $\mathcal{B}$ de E ; propriétés :
   - $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{B}))$; f est surjective $\Leftrightarrow$ $f(\mathcal{B})$ est génératrice ;
   - f est injective $\Leftrightarrow$ $f(\mathcal{B})$ est libre ;
   - f est bijective $\Leftrightarrow$ $f(\mathcal{B})$ est une base.
2. Classification des espaces de dimension finie : $\dim E = n$ ssi E et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes (étant donnée une base de E, contruction de l'isomorphisme). Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels sont isomorphes ssi ils ont la même dimension.
3. **Rang d'une application linéaire**. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Définition :
$$\boxed{\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f}$$
Formule du rang :
$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rang} f = \dim E}$$
4. En dimension finie, un **endomorphisme** est *bijectif* ssi il est *injectif* ssi il est *surjectif*. **À savoir montrer**.