Programme de colle 23 : semaine 17 du 25/04 au 29/04

Chapitre 16. Probabilités sur un univers fini

⚠Revoir les chapitres 8 & 9 sur les ensembles et le dénombrement.

1. le langage des probabilités

1. **Expérience aléatoire.** L'ensemble des résultats (ou issues) d'une expérience aléatoire est appelé *univers* et est noté Ω ; dans ce chapitre c'est un ensemble **fini**. Un *évènement* est un sous ensemble $A \subset \Omega$; l'ensemble des *évènements* est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω. Vocabulaire usuel sur les évènements et traduction ensembliste (contraire, ou, et...).
2. **Mesure de probabilité.** C'est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :
   - ⋆ $P(\Omega) = 1$;
   - ⋆ si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

   Propriétés et règles de calcul usuelles.
   Construction d'une probabilité. Pour $\Omega = \{w_1, ..., w_n\}$ toute probabilité est uniquement déterminée par sa valeur sur les évènements élémentaires. Étant donné $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}_+^n$ vérifiant $\sum \alpha_i = 1$ alors l'application définie par $P(\{\omega_i\}) = \alpha_i$ et prolongée par l'identité :

   $$P(A) = \bigcup_{\omega \in A} P(\{\omega\}) \text{ ,avec } A \subset \Omega,$$

   définie une probabilité sur Ω.
   Exemple fondamental : la probabilité uniforme.

   $$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{« nbre d'issues favorables à } A \text{ »}}{\text{« nbre d'issues total »}}$$

   Exemples usuels de situations conduisant à une probabilité uniforme (lancers successifs de dé non truqués, tirages avec ou sans remise dans une urne contenant n boules distinctes...).
   Une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'évènements est un *système complet* lorsque :
   - ⋆ $\bigcup_{i\in I} E_i = \Omega$;
   - ⋆ si $i \neq j$ alors $E_i \cap E_j = \emptyset$.

   En particulier : $1 = \sum_{i\in I} P(E_i)$. Nous supposons pour simplifier que $P(E_i) > 0$.

2. Probabilités conditionnelles

1. Définition d'une **probabilité conditionnelle**

   $$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} \text{ lorsque } P(E) > 0.$$

   On note aussi : $P(A|E) := P_E(A)$.
   Une probabilité conditionnelle induit une mesure de probabilité $P_E(.)$ sur Ω. Règles de calcul usuelles.

2. Modélisation d'une expérience aléatoire par un arbre. Formules associées *à savoir retrouver* :
   (a) **Probabilités composées.** Pour $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que $P(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})>0$:
   $$\boxed{P(A_1\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)}$$
   (b) **Probabilités totales.** Pour un système complet $(E_i)_{1\leq i\leq n}$:
   $$\boxed{P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(E_i)P_{E_i}(A)}$$
   (c) **Bayes ou « probabilité des causes ».** Pour un système complet $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ et pour $j\in[\![1,n]\!]$:
   $$\boxed{P(E_j|A)=\frac{P(A)P(A|E_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}P(E_i)P_{E_i}(A)}}$$
3. **Évènements indépendants**. Deux évènements A et B sont indépendants lorsque :
   $$P(A\cap B)=P(A)P(B).$$
   Famille d'évènements mutuellement indépendants.

Chapitre 17. Applications linéaires

⚠Revoir les chapitres 6 & 12 sur les systèmes linéaires et le calcul matriciel (calcul du rang, de l'inverse).

⚠Revoir le chapitre 14 sur les espaces vectoriels en dimension finie.

1. Généralités

1. Définition : soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ (désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une application $f:E\to F$ est dites **linéaire** lorsque :
   $$\forall(u,v)\in E^2,\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\quad f(\lambda u+\mu v)=\lambda f(u)+\mu f(v)$$
   Exemples usuels (de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$, dérivation, intégrale...).
2. Propriétés (image du vecteur nul, combinaisons linéaires et compositions d'applications linéaires).
3. Noyau et image d'une application linéaire $f\in\mathscr{L}(E,F)$.
   Les propriétés ci-dessous sont à savoir démontrer.
   (a) **Noyau.** $\operatorname{Ker} f$: définition ; $\operatorname{Ker} f$ **est un ss-ev de** E**.** f **injective ssi** $\operatorname{Ker} f=\{0_E\}$**.**
   (b) **Image.** $\operatorname{Im} f$: définition ; $\operatorname{Im} f$ **est un ss-ev de** F**.** f **surjective ssi** $\operatorname{Im} f=F$**.**

2. Ensembles d'applications linéaires

1. L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E vers F : $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.
2. Composistion d'applications linéaires. Calculs dans l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E ; puissances d'endomorphismes.
3. Réciproque d'un isomorphisme. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$: définition.