# Programme de colle 22 : semaine 14 du 4/04 au 8/04

# Chapitre 15. Dérivabilité des fonctions d'une variable réelle

⚠Revoir le chapitre 5 sur les équations différentielles d'ordre 1.

## 3. Accroissements finis

1. Nombre dérivé et extrema locaux.
2. **Théorème de Rolle**
3. **Égalité et inégalité des accroissements finis.**

   Soit deux réels $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
   Si $f$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que :

   $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

   De plus, si $f'$ est bornée sur $]a, b[$ alors

   $$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \sup_{t \in ]a,b[} |f'(t)|$$

   Interprétations géométrique et cinématique.
   Exemples d'utilisations : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$, toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne.

## 4. Applications à l'étude de fonctions

1. Caractérisation à l'aide de la dérivée des fonctions constantes, monotones et strictement monotones. Détermination d'extrema.
2. **Théorème de la limite de la dérivée**. Si $f$ est $C^1$ sur $I \setminus \{a\}$, continue en $a$ et $\lim_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $f'(a) = \ell$.

# Chapitre 16. Probabilités sur un univers fini

⚠Revoir les chapitres 8 & 9 sur les ensembles et le dénombrement.

## 1. le langage des probabilités

1. **Expérience aléatoire.** L'ensemble des résultats (ou issues) d'une expérience aléatoire est appelé *univers* et est noté $\Omega$ ; dans ce chapitre c'est un ensemble **fini**. Un *évènement* est un sous ensemble $A \subset \Omega$ ; l'ensemble des *évènements* est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de $\Omega$. Vocabulaire usuel sur les évènements et traduction ensembliste (contraire, ou, et...).
2. **Mesure de probabilité.** C'est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ vérifiant :
   - ⋆ $P(\Omega) = 1$ ;
   - ⋆ si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

   Propriétés et règles de calcul usuelles.
   **Construction d'une probabilité.** Pour $\Omega = \{w_1, ..., w_n\}$ toute probabilité est uniquement déterminée par sa valeur sur les évènements élémentaires. Étant donné $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}_+^n$ vérifiant $\sum \alpha_i = 1$ alors l'application définie par $P(\{\omega_i\}) = \alpha_i$ et prolongée par l'identité :

   $$P(A) = \bigcup_{\omega \in A} P(\{\omega\}) \text{ ,avec } A \subset \Omega,$$

définie une probabilité sur $\Omega$.

**Exemple fondamental : la probabilité uniforme.**

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\text{« nbre d'issues favorables à } A \text{ »}}{\text{« nbre d'issues total »}}$$

Exemples usuels de situations conduisant à une probabilité uniforme (lancers successifs de dé non truqués, tirages avec ou sans remise dans une urne contenant $n$ boules distinctes...).

Une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'évènements est un *système complet* lorsque :

- ⋆ $\bigcup_{i\in I} E_i = \Omega$ ;
- ⋆ si $i \neq j$ alors $E_i \cap E_j = \emptyset$.

En particulier : $1 = \sum_{i\in I} P(E_i)$.