Programme de colle 1 : semaine 38 du 14/09 au 18/09

Chapitre 0. Pour bien démarrer

- **Prolégomènes A** : quelques consignes pour bien lire et écrire des mathématiques ; quelques méthodes de démonstration (par implications, par l'absurde, par analyse-synthèse, par équivalences) ; du bon usage des quantificateurs.
- **Prolégomènes B** : inégalités et inéquations dans l'ensemble des nombres réels ; utilisation de la valeur absolue et inégalité triangulaire ; les intervalles.
- **Prolégomènes C** : rappels de trigonométrie ; formules d'addition et de duplication ; transformation d'expressions trigonométriques ; équations et inéquations trigonométriques.

⋆⋆⋆

Questions de cours : trigonométrie.

Les formules vues dans la fiche **Prolégomènes C**.

Exercices à rédiger, consignes.

Pour votre première interrogation orale, vous préparez trois exercices de la liste ci-dessous, un dans chaque catégorie. Vous présentez au tableau l'un de ces exercices, même s'il n'est pas complet, même s'il n'est pas parfaitement rédigé : l'objectif est d'apprendre et de progresser.

⋆⋆⋆

Catégorie A. Raisonnements et rédaction

Exercice 1. Démontrer l'affirmation suivante :

« π est un nombre rationnel si et seulement si $\dfrac{\pi}{\pi+1}$ est un nombre rationnel. »

Exercice 2. Écrire la **négation** de l'affirmation suivante :

« Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui ne s'annule pas, si f bornée alors l'inverse de f est bornée. »

L'affirmation est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 3. Écrire la **négation** de l'affirmation suivante :

$$« \ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |x| < \delta \implies x^2 < \varepsilon. \ »$$

L'affirmation est-elle vraie ? Justifier.

⋆⋆⋆

Catégorie B. *Inégalités*

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2}$. Étudier le cas d'égalité.
2. Justifier que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$$\frac{|x + y + z|}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5.

1. Soient α et β deux réels strictement positifs. Montrer que $\dfrac{3\alpha-\beta}{4} \leq \dfrac{\alpha^2}{\alpha+\beta}\cdot$ Étudier le cas d'égalité.
2. En déduire que pour tout $(\alpha,\beta,\gamma) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ on a l'inégalité :

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \leq \frac{\alpha^2}{\alpha+\beta} + \frac{\beta^2}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma^2}{\gamma+\alpha}\cdot$$

Le cas d'égalité est-il atteint ?

⋆⋆⋆

Catégorie C. *Inégalités et études de fonctions*

Exercice 6. On se propose de montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}\cdot$$

1. On considère la fonction numérique $f : t \mapsto \dfrac{t}{1+t}\cdot$
   (a) Préciser le domaine de définition de la fonction f.
   (b) Déterminer le tableau complet des variations cette fonction.
2. Justifier que pour tous réels strictement positifs α et β nous avons l'inégalité :

$$f(\alpha+\beta) < f(\alpha) + f(\beta).$$

On pourra étudier les variations sur $]0,+\infty[$ de $t \mapsto f(t) + f(\beta) - f(t+\beta)$.

3. Conclure sur l'inégalité cherchée.

Exercice 7. Étant donné un entier $n \geq 0$ et une famille finie $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ de nombres réels, on pose :

$$S_n = |x_1| + \cdots + |x_n| \quad \text{et} \quad P_n = (1+x_1)\cdots(1+x_n)$$

Dans cet exercice, on se propose d'établir l'inégalité

$$|P_n| \leq e^{S_n} \quad (\star)$$

1. Réaliser l'étude complète de la fonction $s \mapsto e^s - s - 1$ et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct.
2. En déduire que pour tout $s \in \mathbb{R}$, nous avons l'inégalité : $e^s \geq 1 + s$.
3. Établir que $|1 + x_k| \leq e^{|x_k|}$ puis en déduire l'inégalité $(\star)$.

⋆⋆⋆