Programme de colle 19 : semaine 11 du 14/03 au 18/03

Chapitre 14 : espaces vectoriels et dimension finie

⚠Revoir les chapitres 6 & 11 sur les systèmes linéaires et les matrices.

1. Généralités

Structure d'espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (en pratique $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Espaces usuels : vecteurs géométriques ; $\mathbb{K}^n$; espace des matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; espace des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$; polynômes $\mathbb{K}[X]$; espace d'applications d'un ensemble A vers $\mathbb{K}$. Espace produit de deux espaces vectoriels.

2. Sous-espaces vectoriels

1. **Définition d'un ss-ev :** une partie F d'un ev et un ss-ev lorsque :

   $$\begin{array}{ll} (i) & F \neq \emptyset \\ (ii) & \text{Pour tout } (u,v) \in F^2 \text{ et tout } (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda.u + \mu.v \in F \end{array}$$

   Un ss-ev est stable par combinaisons linéaires ; $0_E \in F$; un ss-ev est un ev pour les lois induites.
2. **Exemples usuels** : sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$...$\mathbb{R}^n$ définis par des équations linéaires. Ensemble des solutions d'une e.q.d. linéaire. $\mathbb{R}_n[X]$. Espaces d'applications : $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$....
3. **L'intersection de deux ss-ev est un ss-ev**.
4. **Sous-espace vectoriel engendré par une partie finie**.
   (a) Soit $\mathcal{V} = v_1, v_2, ..., v_n$ une famille de vecteurs ; Vect $(\mathcal{V})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{V}$:
   $$\boxed{\text{Vect}\,(\mathcal{V}) = \{\lambda_1.v_1 + ... + \lambda_n.v_n \mid (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}}$$
   (b) Vect $(\mathcal{V})$ **est un ss-e.v.**
   (c) Propriétés :
   $$\text{Vect}\,(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = \text{Vect}\,(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n)$$
   $$\text{Vect}\,(v_1, v_2, ..., v_n) = \text{Vect}\,(v_1, v_2, ..., \lambda.v_n)\,, \lambda \in \mathbb{K}^*$$
   $$\text{Vect}\,(v_1, v_2, ..., v_n) = \text{Vect}\left(v_1, v_2, ..., v_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i.v_i\right)$$

3. Familles (finies) de vecteurs

1. **Familles libres, familles génératrices d'un espace**. Définitions et propriétés. Détermination de parties génératrices (finies) de ss-ev (cas simples).
2. **Bases.**
   (a) Définition : une famille de vecteurs est une base d'un espace ssi c'est une famille libre et génératrice de l'espace.
   (b) Propriétés : $\mathcal{B} = e_1, e_2, ..., e_n$ est une base de E lorsque pour tout $v \in E$, il existe $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ unique (*coordonnées*) tel que
   $$v = x_1.e_1 + ... + x_n.e_n$$
   (c) Exemples usuels : bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$; base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

4. Théorie de la dimension

Note : les démonstrations de cours de ce paragraphe ne sont pas exigibles.

1. **Définition et propriétés de la dimension.**
   (a) Espace de dimension finie (*i.e.* finiment engendré). Dans un espace de dimension finie toutes les bases ont le même cardinal : c'est la *dimension* de l'espace.
   (b) **Théorème de la base extraite :** toute famille génératrice contient une base.
   (c) **Théorème de la base incomplète.**
2. **Caractérisation des bases.** Soit $\mathcal{U}$ une famille de p vecteurs de E avec $\dim E = n$.
   (a) si $\mathcal{U}$ est libre alors $p \leq n$ avec égalité ssi $\mathcal{U}$ est une base.
   (b) si $\mathcal{U}$ est génératrice alors $p \geq n$ avec égalité ssi $\mathcal{U}$ est une base.

5. Dimension finie et sous-espaces

1. **Sous-espace en dimension finie. Un sous-espace** F **d'un espace de dimension finie** E **est de dimension finie et** $\dim F \leq \dim E$ **avec égalité si et seulement si** $F = E$**.**
2. **Rang** d'une famille de vecteurs : c'est la dimension du sous-espace engendré par ces vecteurs.