Programme de colle 18 : semaine 10 du 7/03 au 11/03

Chapitre 13. Fonction d'une variable réelle

⚠Revoir le chapitre 7 sur les développements limités.

⚠Revoir le chapitre 10 sur les nombres réels (borne sup...).

1. Notions de limites

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ ($=I \cup \{$extrémités de $I\}$) et $f : I \to \mathbb{R}$.

1. **Définitions quantifiées** de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ (avec $b \in \bar{\mathbb{R}}$).

   Exemple. Lorsque $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

   On dit que f admet ℓ pour limite quand x tend vers a lorsque :
   pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in I$:
   $$|x - a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
2. Propriétés : unicité de la limite ; limite finie $\Rightarrow$ borné au voisinage.
3. **Caractérisation séquentielle de la limite** : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ si et seulement si l'image par f de toute suite qui tend vers a est une suite qui tend vers b.
4. Fonctions monotones : existence de la limite à droite et à gauche (lorsque cela a un sens) pour une fonction monotone.
5. **Calculs de limites** :
   (a) Règles utilisant une inégalité : le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 tend vers 0 ; comparaison des limites ; théorèmes d'encadrements.
   (b) Règles opératoires sur les limites (somme, produit, inverse et composition).
   (c) Règles de comparaison (O,o et $\sim$). **Croissances comparées usuelles. Développement limités usuels** et utilisation des D.L. pour calculer des limites.

2. Continuité locale

1. Définition ($f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors $\ell = f(a)$).
2. Propriétés usuelles (somme, produit, composition). Continuité à gauche et à droite.
3. **Prolongement par continuité**.

3. Continuité sur un intervalle

1. Définition et propriétés (somme, produit, composition).
2. **Le théorème des valeurs intermédiaires.** L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
3. **Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes**. L'image par une fonction continue d'un segment est un segment.
4. **Le théorème de la bijection.** Toute fonction définie sur un *intervalle*, *continue* et *strictement monotone* induit une bijection vers l'intervalle image. Sa réciproque a la même monotonie et est continue.

Chapitre 14 : espaces vectoriels et dimension finie

1. Généralités

Structure d'espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (en pratique $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Espaces usuels : vecteurs géométriques ; $\mathbb{K}^n$; espace des matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; espace des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$; polynômes $\mathbb{K}[X]$; espace d'applications d'un ensemble A vers $\mathbb{K}$. Espace produit de deux espaces vectoriels.

2. Sous-espaces vectoriels

1. **Définition d'un ss-ev :** une partie F d'un ev et un ss-ev lorsque :

   $$\begin{array}{ll} (i) & F \neq \emptyset \\ (ii) & \text{Pour tout } (u,v) \in F^2 \text{ et tout } (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda.u + \mu.v \in F \end{array}$$

   Un ss-ev est stable par combinaisons linéaires ; $0_E \in F$; un ss-ev est un ev pour les lois induites.
2. **Exemples usuels** : sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$...$\mathbb{R}^n$ définis par des équations linéaires. Ensemble des solutions d'une e.q.d. linéaire. $\mathbb{R}_n[X]$. Espaces d'applications : $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$....
3. **L'intersection de deux ss-ev est un ss-ev**.
4. **Sous-espace vectoriel engendré par une partie finie**.
   (a) Soit $\mathcal{V} = v_1, v_2, ..., v_n$ une famille de vecteurs ; $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{V})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{V}$:

   $$\boxed{\mathrm{Vect}\,(\mathcal{V}) = \{\lambda_1.v_1 + ... + \lambda_n.v_n \mid (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}}$$

   (b) $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{V})$ **est un ss-e.v.**

   (c) Propriétés :

   $$\mathrm{Vect}\,(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = \mathrm{Vect}\,(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n)$$

   $$\mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, ..., v_n) = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, ..., \lambda.v_n)\,, \lambda \in \mathbb{K}^*$$

   $$\mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, ..., v_n) = \mathrm{Vect}\left(v_1, v_2, ..., v_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i.v_i\right)$$