

## Programme de colle 17 : semaine 9 du 29/02 au 4/03

### Chapitre 12. Nombres complexes II : compléments

△ Revoir le chapitre 3 sur les nombres complexes.

**Rappels** Dictionnaire : plan euclidien muni d'un repère ON direct - ensemble  $\mathbb{C}$ . Expression complexe pour une distance, un angle ; conditions d'alignement et d'orthogonalité.

#### 1. Racines $n$ -ièmes dans $\mathbb{C}$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Racines  $n$ -ièmes de l'unité. Définition et écriture trigonométrique :  $e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k = 0 \dots n - 1$ . Somme. Représentation dans le plan complexe.
2. Définition d'une racine  $n$ -ième. Théorème d'existence pour tout complexe non nul de  $n$  racines  $n$ -ièmes distinctes ; méthode de détermination pratique (passage en notation exponentielle).

### Chapitre 13. Fonction d'une variable réelle

△ Revoir le chapitre 7 sur les développements limités.

△ Revoir le chapitre 10 sur les nombres réels (borne sup...).

#### 1. Notions de limites

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$  ( $= I \cup \{\text{extrémités de } I\}$ ) et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. **Définitions quantifiées** de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  (avec  $b \in \mathbb{R}$ ).

Exemple. Lorsque  $a \in \mathbb{R}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  admet  $\ell$  pour limite quand  $x$  tend vers  $a$  lorsque :  
pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in I$  :

$$|x - a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2. Propriétés : unicité de la limite ; limite finie  $\Rightarrow$  borné au voisinage.
3. **Caractérisation séquentielle de la limite** :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  si et seulement si l'image par  $f$  de toute suite qui tend vers  $a$  est une suite qui tend vers  $b$ .
4. Fonctions monotones : existence de la limite à droite et à gauche (lorsque cela a un sens) pour une fonction monotone.
5. **Calculs de limites** :
  - (a) Règles utilisant une inégalité : le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 tend vers 0 ; comparaison des limites ; théorèmes d'encadrements.
  - (b) Règles opératoires sur les limites (somme, produit, inverse et composition).
  - (c) Règles de comparaison ( $O, o$  et  $\sim$ ). **Croissances comparées usuelles. Développement limités usuels** et utilisation des D.L. pour calculer des limites.

#### 2. Continuité locale

1. Définition ( $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . La fonction  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ . Alors  $\ell = f(a)$ ).
2. Propriétés usuelles (somme, produit, composition). Continuité à gauche et à droite.
3. **Prolongement par continuité.**

### 3. Continuité sur un intervalle

1. Définition et propriétés (somme, produit, composition).
2. **Le théorème des valeurs intermédiaires.** L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
3. **Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.** L'image par une fonction continue d'un segment est un segment.
4. **Le théorème de la bijection.** Toute fonction définie sur un *intervalle*, *continue* et *strictement monotone* induit une bijection vers l'intervalle image. Sa réciproque a la même monotonie et est continue.