Programme de colle 15 : semaine 4 du 25/01 au 29/01

Chapitre 10. Nombres réels & suites de nombres réels

⚠Vous devez revoir les prolégomènes B sur le calcul numérique, les inégalités et les inéquations.

1. Les nombres réels

1. Rappels sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels : $\mathbb{R}$ est muni d'une valeur absolue (**propriétés**) ; intervalles dans $\mathbb{R}$; inégalités et inéquations.
2. Définition d'une **borne supérieure** (et inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Propriété : **toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure**.
   Caractérisation pratique d'une borne supérieure (resp. inférieure) dans $\mathbb{R}$:
   $$\alpha = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \text{ tel que } \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha \end{cases}$$
   $$\beta = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ \beta \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \text{ tel que } \beta \leq x < \beta + \varepsilon \end{cases}$$
   Définition de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
3. **Partie entière** d'un nombre réel : définition.

2. Suites de nombres réels : généralités

1. Vocabulaire (suites monotones, bornées...) ; opérations sur les suites.
2. Suites arithmétiques et suites géométriques. Étude des suites arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ et $u_0 \in \mathbb{C}$. Expression du terme u_n en fonction de n. Convergence.

3. Notions de limites

1. **Limite d'une suite : définition quantifiée**. On dit que $(u_n)_n$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque :
   $$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0 \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon}$$
   - ⋆ **Conséquences** : $\lim u_n = \ell$ ssi $\lim |u_n - \ell| = 0$; unicité de la limite ; le produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0, converge vers 0 ; toute suite convergente est bornée.
   - ⋆ Opérations algébriques sur les limites.
2. **Limites infinies.**
   - ⋆ Définitions quantifiée de $\lim u_n = +\infty$ et $\lim u_n = -\infty$.
   $$\boxed{\lim u_n = +\infty \ \Leftrightarrow\ \forall A \in \mathbb{R}, \exists N_A \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_A \Rightarrow u_n \geq A}$$
   - ⋆ Règles de calcul (attention aux **formes indéterminées**).
3. Comparaison de suites (comparaison des limites). **Théorèmes d'encadrements**.
4. **Suites extraites.** Définition. Propriété : toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

4. Théorèmes d'existence de limite

1. **Théorèmes des suites monotones** : « toute suite croissante et majorée est convergente » ; « toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$ ».
2. **Suites adjacentes** : définition et théorème « deux suites adjacentes convergent vers la même limite ».

5. Relations de comparaison

1. **Relations « petit o » et « grand O »**. Lorsque $(v_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on dit que :
   - $u_n = O(v_n)$ lorsque $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée.
   - $u_n = o(v_n)$ lorsque $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

   Principales propriétés et règles de calcul (à déduire des définitions).
2. **Relation d'équivalence**. Lorsque $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, on dit que :
   - $u_n \sim v_n$ lorsque $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$.

   $$\boxed{u_n \sim v_n \quad \Leftrightarrow \quad u_n = v_n + o(v_n)}$$

   Principales propriétés et règles de calcul.
   Si $u_n \sim v_n$ et $\lim v_n = \ell$ alors $\lim u_n = \ell$.
3. Comparaisons des suites usuelles (*croissances comparées usuelles*) ; échelle de comparaison : 1, $\ln(n)^\alpha$, n^β, q^n avec $q > 1$, $n!$.