Programme de colle 14 : semaine 3 du 18/01 au 22/01

Chapitre 9. Nombres entiers et combinatoire

⚠Revoir TD méthodes algébriques : récurrence, calcul de sommes et produits, coefficients binomiaux.

1.Relation d'ordre dans $\mathbb{N}$

1. Relation d'ordre sur $\mathbb{N}$: propriétés fondamentales.
   - ⋆ Toute partie non vide admet un plus petit élément.
   - ⋆ Toute partie non vide et majorée admet un plus grand élément.
   - ⋆ $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.
2. Rappels sur la récurrence.

2. Ensembles finis

Note : rien d'exigible comme démonstration dans ce paragraphe.

1. Ensemble fini et cardinal : définitions.
2. Cardinal d'un sous-ensemble ; si $A \subset B$ et $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$ alors $A = B$;
$$\operatorname{card}(A \cup B) + \operatorname{card}(A \cap B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B).$$
3. Soit $f : E \to F$ une application entre ensembles finis. Nous avons la formule sommatoire :
$$\operatorname{card} E = \sum_{y \in F} \operatorname{card} f^{-1}(\{y\})$$
4. Applications entre ensembles finis : entre deux ensembles de même cardinal une application est surjective ssi elle est injective.

3. Dénombrements usuels

Principe du dénombrement par *choix successifs*.

1. Cardinal d'un produit cartésien fini d'ensembles finis.
2. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini vers un autre ensemble fini.
3. Dénombrement de p-listes sans répétition d'un ensemble fini. Lien avec les applications injectives ; nombre de **permutations** d'un ensemble fini.
4. Cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.
5. Dénombrement de p-combinaisons (ou sous-ensembles de cardinal p) d'un ensemble fini : retour sur les **coefficients binomiaux**.

4. Notions d'arithmétique dans $\mathbb{N}$

1. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$. Algorithme de la division euclidienne .
2. Relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$: b divise a lorsqu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $a = bd$.
3. PGCD : définition. Propriété $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(b, r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b. ; algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.
4. Nombre premier (dans $\mathbb{N}$) : définition. Existence et unicité de la décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers (démonstration admise).

Chapitre 10. Nombres réels & suites de nombres réels

⚠Vous devez revoir les prolégomènes B sur le calcul numérique, les inégalités et les inéquations.

1. Les nombres réels

1. Rappels sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels : $\mathbb{R}$ est muni d'une valeur absolue (**propriétés**) ; intervalles dans $\mathbb{R}$; inégalités et inéquations.
2. Définition d'une **borne supérieure** (et inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Propriété : **toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure**.
   Caractérisation pratique d'une borne supérieure (resp. inférieure) dans $\mathbb{R}$:
   $$\alpha = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \text{ tel que } \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha \end{cases}$$
   $$\beta = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ \beta \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \text{ tel que } \beta \leq x < \beta + \varepsilon \end{cases}$$
   Définition de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
3. **Partie entière** d'un nombre réel : définition.

2. Suites de nombres réels : généralités

1. Vocabulaire (suites monotones, bornées...) ; opérations sur les suites.
2. Suites arithmétiques et suites géométriques. Étude des suites arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ et $u_0 \in \mathbb{C}$. Expression du terme u_n en fonction de n. Convergence.

3. Notions de limites

1. **Limite d'une suite : définition quantifiée**. On dit que $(u_n)_n$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque :
   $$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0 \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon}$$
   - ⋆ **Conséquences** : $\lim u_n = \ell$ ssi $\lim |u_n - \ell| = 0$; unicité de la limite ; le produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0, converge vers 0 ; toute suite convergente est bornée.
   - ⋆ Opérations algébriques sur les limites.
2. **Limites infinies.**
   - ⋆ Définitions quantifiée de $\lim u_n = +\infty$ et $\lim u_n = -\infty$.
   $$\boxed{\lim u_n = +\infty \ \Leftrightarrow\ \forall A \in \mathbb{R}, \exists N_A \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_A \Rightarrow u_n \geq A}$$
   - ⋆ Règles de calcul (attention aux **formes indéterminées**).
3. Comparaison de suites (comparaison des limites). **Théorèmes d'encadrements**.