

## Programme de colle 13 : semaine 2 du 11/01 au 15/01

### Chapitre 8. Ensembles et applications : compléments

⚠ Vous devez revoir les prolégomènes A et le chapitre 1 du début d'année.

#### 1. Notions sur les ensembles

1. Vocabulaire général sur les ensembles (relation d'appartenance, d'inclusion) ; ensemble vide.
2. Ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$  (ou *ensemble des parties*).
3. Opérations sur les ensembles : union, intersection et complémentaire. Règles de calcul usuelles.
4. Produit cartésien d'ensembles.

#### 2. Relations binaires

Définition d'une relation d'équivalence ; quelques exemples.

#### 3. Notions sur les applications

1. Rappels : composition d'application ; application identité. Application réciproque d'une application bijective.
2. Applications injectives, surjectives et bijectives : définitions et exemples.
3. À savoir démontrer : la composée de deux injections (resp. surjections) est injective (resp. surjective). La composée de deux bijections  $f$  et  $g$  est bijective et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .
4. Définition de l'image directe et réciproque d'une partie par une application.

### Chapitre 9. Nombres entiers et combinatoire

⚠ Revoir TD méthodes algébriques : récurrence, calcul de sommes et produits, coefficients binomiaux.

#### 1. Relation d'ordre dans $\mathbb{N}$

1. Relation d'ordre sur  $\mathbb{N}$  : propriétés fondamentales.
  - ★ Toute partie non vide admet un plus petit élément.
  - ★ Toute partie non vide et majorée admet un plus grand élément.
  - ★  $\mathbb{N}$  n'est pas majoré.
2. Rappels sur la récurrence.

#### 2. Ensembles finis

*Note : rien d'exigible comme démonstration dans ce paragraphe.*

1. Ensemble fini et cardinal : définitions.
2. Cardinal d'un sous-ensemble ; si  $A \subset B$  et  $\text{card } A = \text{card } B$  alors  $A = B$  ;

$$\text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B).$$

3. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application entre ensembles finis. Nous avons la formule sommatoire :

$$\text{card } E = \sum_{y \in F} \text{card } f^{-1}(\{y\})$$

4. Applications entre ensembles finis : entre deux ensembles de même cardinal une application est surjective ssi elle est injective.

### 3. Dénombrements usuels

Principe du dénombrement par *choix successifs*.

1. Cardinal d'un produit cartésien fini d'ensembles finis.
2. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini vers un autre ensemble fini.
3. Dénombrement de  $p$ -listes sans répétition d'un ensemble fini. Lien avec les applications injectives ; nombre de **permutations** d'un ensemble fini.
4. Cardinal de l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$ .
5. Dénombrement de  $p$ -combinaisons (ou sous-ensembles de cardinal  $p$ ) d'un ensemble fini : retour sur les **coefficients binomiaux**.

### 4. Notions d'arithmétique dans $\mathbb{N}$

1. Division euclidienne dans  $\mathbb{N}$ . **Algorithme de la division euclidienne** .
2. Relation de divisibilité dans  $\mathbb{N}$  :  $b$  divise  $a$  lorsqu'il existe  $d \in \mathbb{N}$  tel que  $a = bd$ .
3. PGCD : définition. Propriété  $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$  où  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  ; **algorithme d'Euclide** pour le calcul du PGCD.
4. Nombre premier (dans  $\mathbb{N}$ ) : définition. Existence et unicité de la décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers (démonstration admise).