Programme de colle 12 : semaine 51 du 14/12 au 18/12

Chapitre 7. Développements limités

Les fonctions étudiées sont définies dans un voisinage I de x_0, sauf éventuellement en x_0.

1. Qu'est-ce qu'un développement limité ?

1. Définition d'un **développement limité** d'une fontion f à l'ordre n en $x_0 \in I$ (*a.k.a.* $DL_n(x_0)$) : pour tout $x \in I$ (ou $x \in I \setminus \{x_0\}$),

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

   avec $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

   Écriture en 0. $f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + h^n \varepsilon_0(h)$, avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_0(h) = 0$.

2. La formule de **Taylor-Young** (*admise pour l'instant*) : si f est de classe $\mathscr{C}^n$ alors

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

3. **D.L. usuels en** 0 : $x \mapsto \dfrac{1}{1 - x}$, exp, cos, sin, $x \mapsto (1 + x)^\alpha$.

2. Outils de comparaison locale

La fonction g ne s'annule pas au voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0).

1. Relation de négligeabilité $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$, lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Règles de calculs usuelles.

2. Relation d'équivalence $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$, lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Règles de calculs usuelles.

   Lien : $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \to x_0}{=} g(x) + o(g(x))$.

3. Écriture (et calcul) d'un $DL_n(x_0)$ sous la forme :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

   Dans ce cas, si a_p est le premier terme non nul, alors :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} a_p(x - x_0)^p.$$

3. Comment calculer des DL ?

Opérations sur les développements limités : substitutions « simples » ; combinaison linéaire ; produit ; primitivation ; composition (cas simples, au voisinage de 0) ; soit f ne s'annulant pas au voisinage d'un point x_0 : D.L. en x_0 de f^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$ (notamment $\alpha = -1$).

D.L. usuels en 0 : $x \mapsto \ln(1 + x)$, arctan.

4. À quoi ça sert ?

1. Calculs d'équivalents ; quelques équivalents usuels (liste loin d'être exhaustive...) à savoir retrouver :

$$\begin{array}{ccc} \sin x \underset{0}{\sim} x & 1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2} & \tan x \underset{0}{\sim} x \\ \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x & e^x - 1 \underset{0}{\sim} x & \arctan x \underset{0}{\sim} x \end{array}$$

2. Calcul de limites.
3. Détermination d'asymptotes à une courbe d'équation $y = f(x)$.
4. Et tant d'autres choses...

Chapitre 8. Ensembles et applications : compléments

⚠Vous devez revoir les prolégomènes A et le chapitre 1 du début d'année.

1. Notions sur les ensembles

1. Vocabulaire général sur les ensembles (relation d'appartenance, d'inclusion) ; ensemble vide.
2. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des sous-ensembles d'un ensemble E (ou *ensemble des parties*).
3. Opérations sur les ensembles : union, intersection et complémentaire. Règles de calcul usuelles.
4. Produit cartésien d'ensembles.

2. Relations binaires

Définition d'une relation d'équivalence ; quelques exemples.

3. Notions sur les applications

1. Rappels : composition d'application ; application identité. Application réciproque d'une application bijective.
2. **Applications injectives, surjectives et bijectives** : définitions et exemples.
3. À savoir démontrer : la composée de deux injections (resp. surjections) est injective (resp. surjective). La composée de deux bijections f et g est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
4. Définition de l'image directe et réciproque d'une partie par une application.